

Mercredi 11 janvier 2012  
Intervention de Michel VINAIS  
michelvinais@orange.fr

**Construction des données numériques chez l'enfant au cours des cycles des apprentissages.  
La conquête du nombre et ses difficultés.  
Comprendre pour intervenir...**

Image - Hugo Cabret

**Contenu de l'intervention**

- Productions d'élèves et erreurs
- Quelques préalables sur l'enseignement des mathématiques
- Construction du concept de nombre
- Les difficultés du côté de la matière, des données numériques
- Aspects développementaux de la chaîne numérique
- Procédures de quantification
- Difficulté : sens intrinsèque du nombre et sens extrinsèque
- Base et position / Présentation d'un outil
- Approche des fractions et ses difficultés
- Approche des nombres décimaux et ses difficultés
- Construction de liens : propriétés numériques, des opérations..
- Structuration des connaissances numériques... SLM

Diaporama M. Vinais 2

**Productions d'élèves et erreurs**

**Aminata : Item Eval CE2**

Pose ces deux additions et effectue-les.

$$\begin{array}{r} 62 + 235 \\ 62 \\ + 235 \\ \hline 810 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 + 45 \\ 73 \\ + 45 \\ \hline 118 \end{array}$$

Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 5

**Paul en mars**

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 42 \\ \hline 56 \end{array}$$

Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 7

**François (élève intégré en fin CII) oct**

9 octobre

95 - 72 - 64 - 86 - 99 - 68

64 < 99 < ... < ... < ... < ...

Autre possible 64 < 99 < 68 < 95 < 72 < 86

Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 9

Erreurs CII

« Dix neuf » → 109

« Douze » → 20

« Soixante-dix-huit » → 618

---

Erreurs CIII

« deux millions quatre cent trente huit mille sept cent quarante cinq » → 2 000 000 438 000 745

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      10

Erreurs CIII

Nombre de dizaines dans 428 ?

R : 2

---

Erreurs CIII (Cf travaux Univ.uqam.ca.laval et Irem Paris sud)

**Exemple** : ranger dans l'ordre croissant les nombres : 4,249 4,3 4,06

**R1** : 4,3 < 4,06 < 4,249

**R2** : 4,249 < 4,06 < 4,3

**R3** : 4,06 < 4,3 < 4,249

.../...

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      11

La diversité au sein de la classe ↔ La difficulté scolaire

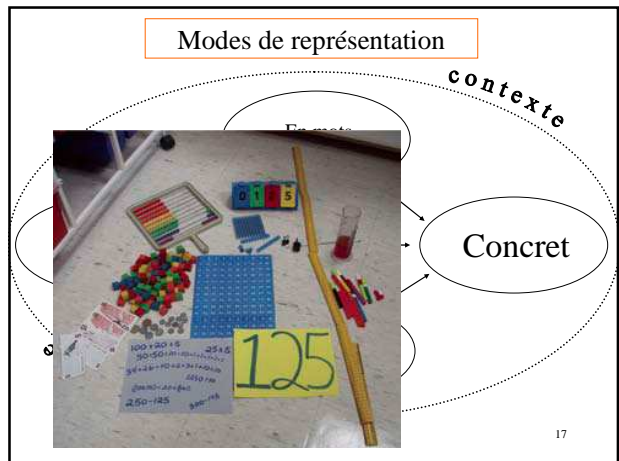
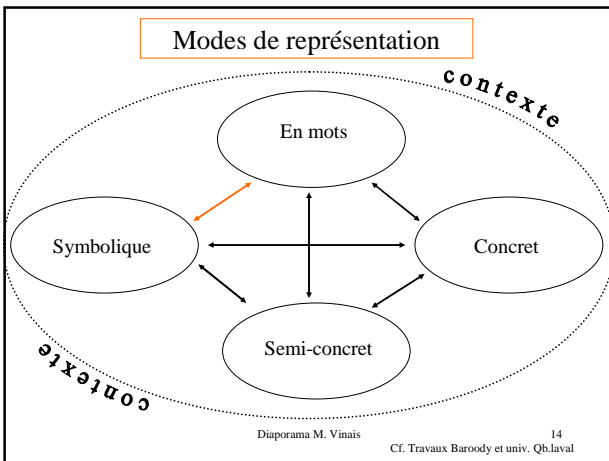
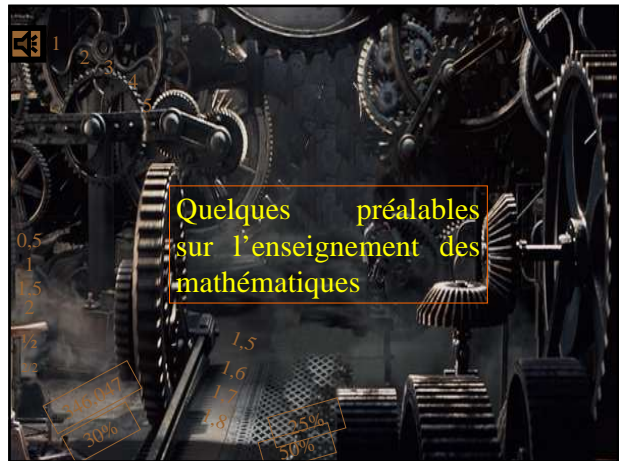
Zone de difficultés mineures circonstancielles.

Zone de difficultés importantes à risque de pérennisation.

Zone de difficultés majeures : échec scolaire / élèves handicapés

Qui est concerné par la difficulté ? D'un double point de vue... l'élève qui ne comprend pas et... l'enseignant qui ne comprend pas qu'il ne comprenne pas et qui ne comprend pas ce qu'il ne comprend pas...

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      12



Modes de représentation

concrete

La représentation est \_\_\_ unité(s) de mille, \_\_\_ centaine(s), \_\_\_ dizaine(s) et \_\_\_ unité(s).

18

Modes de représentation

Un nombre peut être représenté par des dessins de façon à illustrer certains regroupements.

Semi-concret

Diaporama M. Vinais

19

Modes de représentation

Son illustration peut aussi être en lien avec le matériel de manipulation.

Semi-concret

Diaporama M. Vinais

20

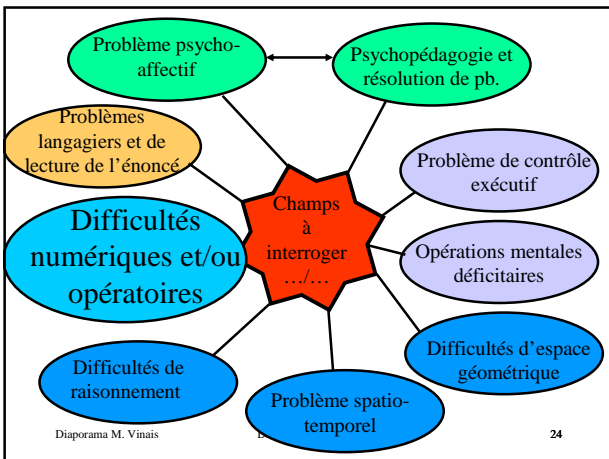
Modes de représentation

Son illustration peut aussi se faire par l'utilisation de la droite numérique.

Semi-concret

Diaporama M. Vinais

21

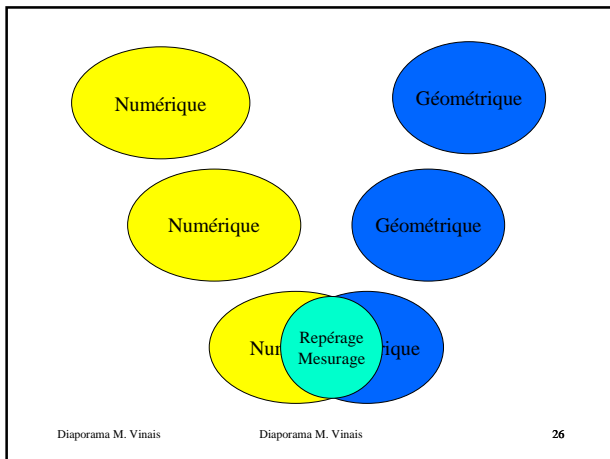


Identifier le domaine travaillé...  
...ainsi que les exigences

Diaporama M. Vinais

Diaporama M. Vinais

25



Qu'est-ce qu'un nombre ?

Plusieurs approches peuvent être envisagées pour tenter de répondre à cette question ; trois me semblent essentielles.

- Il est possible d'interroger les mathématiques elles-mêmes.
- Il est possible de se demander ce que la psychologie, tant des profondeurs que cognitive peut nous apprendre en ce qui concerne cette question.
- Il est enfin possible de questionner l'histoire comparée des différentes réponses développées par les diverses civilisations au cours des siècles, des millénaires.

G. Ifrah parle de : "L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul."

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      28

- 56      12, 0027

7<sup>0,75</sup>

428      12 438 546 684

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      29

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Plusieurs approches peuvent être envisagées pour tenter de répondre à cette question ; trois me semblent essentielles.

- Il est possible d'interroger les mathématiques elles-mêmes.
- Il est possible de se demander ce que la psychologie, tant des profondeurs que cognitive peut nous apprendre en ce qui concerne cette question.
- Il est enfin possible de questionner l'histoire comparée des différentes réponses développées par les diverses civilisations au cours des siècles, des millénaires.

G. Ifrah parle de : "L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul."

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      30

**Éléments d'histoire sur la numération**

Il a fallu plusieurs millénaires et le travail de plusieurs civilisations (*Maya, Babylonienne, Aztèque, Chinoise, Grecque, Egyptienne, Romaine, Indienne, Arabe...*) pour qu'un système de numération apportant une utilisation correcte et collective voit le jour.

- **Les 1ers nombres plutôt "sentis" qu'abstraites**
- **Premiers "lieux d'écriture" des nombres**
- **Des cailloux pour compter**

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      31

### Éléments d'histoire sur la numération

- **Un important apport : les bases.**

L'homme a une capacité instinctive à grouper les objets afin de les classer, les distinguer. C'est également ce qu'il a fait pour développer ses systèmes de numération...

- **Parce qu'il sut compter, l'homme apprit à écrire**
- **Vers la numération de position:**
- **La découverte du Zéro:**
- **L'Inde, berceau de notre numération moderne.**

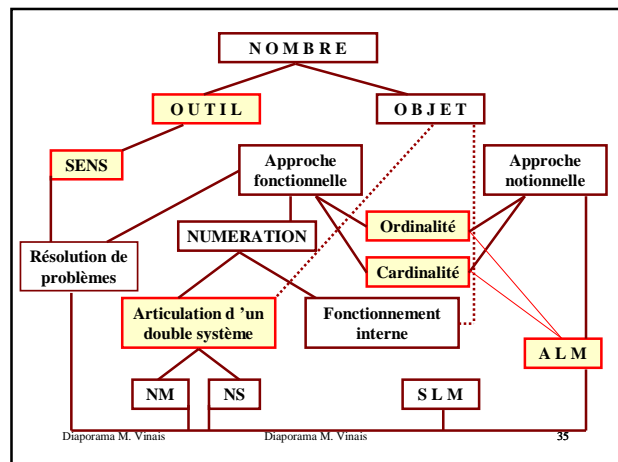
### Chronologie...

- XVI/XVII S Invention de la notation littérale. Émergence du concept d'infini. Mise en évidence de l'importance des décimaux dans les mesures
- XV/XVI S Avec l'usage de l'imprimerie les chiffres indo-arabes acquièrent leur graphie définitive
- X S Chiffres Ghubar dans le Maghreb
- VIII S Arrivée du calcul indien à Bagdad
- IV S Numération décimale de position indienne avec zéro
- II S neuf chiffres Brahmis
- III S Premier zéro de l'histoire de la numération
- IV S Concept d'infini Aristote
- 1800 Première numération de position
- 2 000 Apparition de la base décimale Invention de l'écriture
- 8 000 Apparition des *Calculi* en Mésopotamie
- 30 000 Présence d'entailles numériques

« *Tout sujet apprenant le nombre doit se poser naturellement les mêmes questions que ses inventeurs pour le comprendre.* »

#### L'apport du constructivisme

On admet que la plupart des connaissances (savoirs et savoirs-faire) ne sont ni reçues du milieu par un organisme passif, ni pré-programmées à la naissance de telle façon que le sujet se les approprierait nécessairement. Ces connaissances sont construites par le sujet dans le cours de son activité.



Approche Institutionnelle	Numération Orale	Numération Ecrite
M. Fayol	Numération Lexicale	Numération Syntaxique
S. Baruk	Langue Numérale	Langue Numérique
INS HEA	Numération Mots	Numération Ecrite

Dans N+ pour compter de 0 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systématique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	



Si la perspective piagétienne comporte des éléments fort intéressants quant à la construction du nombre, des recherches plus récentes apportent des éclairages là où la théorie piagétienne est lacunaire et ce particulièrement sur la période précédant la maîtrise opératoire du nombre. En particulier un certain nombre de travaux :

Wagner et Walter 1982 Ginsburg 1982/2002

K. Fuson et al. 1982 / 1988 / 1991

A.Baroody 1987 1991 2004 Steffe 1991

Van de Walle John A., et Sandra FOLK. 2005 .../...

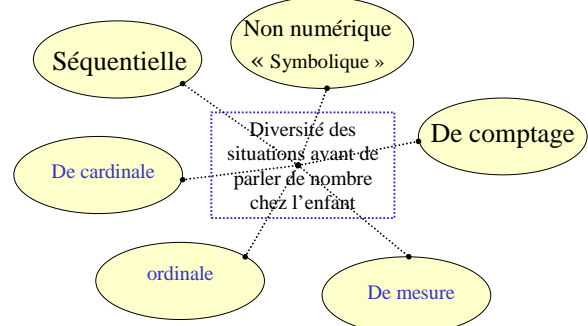
J. Bideaud / H. Lehalle 2000 .../...

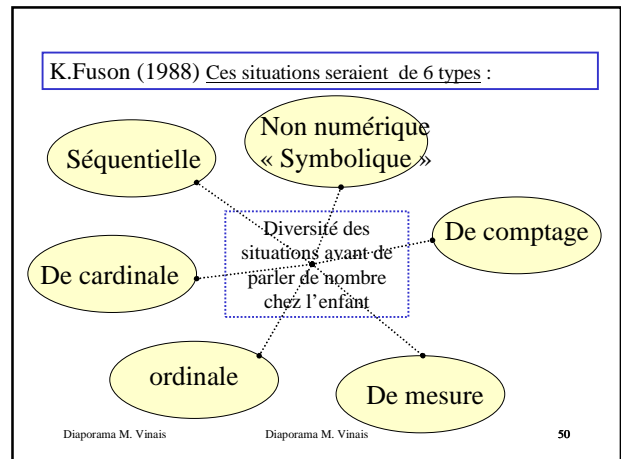
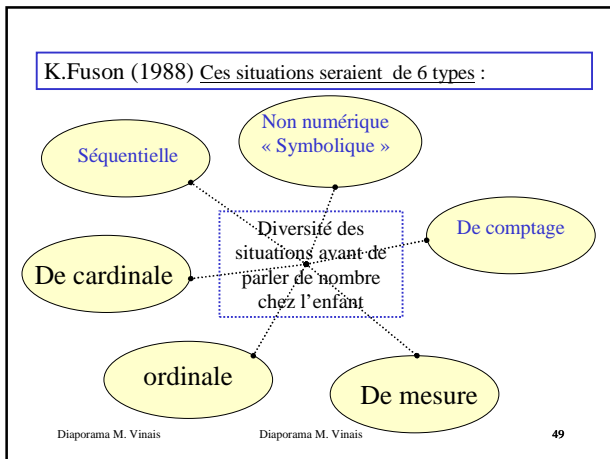
#### Les savoirs spontanés des enfants

- *Existence précoce des mots pour compter*
- *C'est par l'aspect verbal de la numération que l'enfant aborde notre système numérique*
- *C'est d'abord un savoir par cœur, inutilisable dans un immédiat temporel*
- *Le chemin sera long avant de parvenir à une première maîtrise de la numération. Elle s'étalera sur environ 4 années, répartie approximativement de 2 à 6 ans.*
- *Ce savoir à l'état brut va devoir être travaillé, policé.*

K.Fuson (1988) fait remarquer que bien avant d'arriver à construire le nombre du point de vue logique, l'enfant rencontre les mots-nombres dans une variété de situations entre lesquelles il va progressivement établir des liens.

K.Fuson (1988) Ces situations seraient de 6 types :





- Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale.**  
K. Fuson & al (1982)
- **La chaîne chapelet (String level)**
  - La chaîne insécable (liste non sécable)
  - La chaîne sécable
  - La chaîne terminale (chaîne dénombrable)
- Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 51

Chaîne chapelet

Undeuxtrosquatrecinq !

Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 52

- Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale.(1)**  
K. Fuson & al (1982)
- La chaîne chapelet (String level)
  - **La chaîne insécable (liste non sécable)**
  - La chaîne sécable
  - La chaîne terminale (chaîne dénombrable)
- Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 53

Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

- \* Compter jusqu'à n
- \* Livrer le successeur d'un nombre
- \* Première procédure de quantification par comptage

→ Premiers problèmes math.

Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 54

### Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

\* Compter jusqu'à n (n appartenant à ZSE)

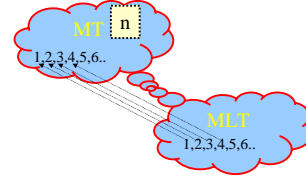


### Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

\* Compter jusqu'à n

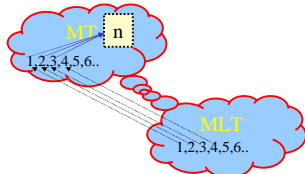


### Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

\* Compter jusqu'à n



### Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale (2)

*K. Fuson & al (1982)*

- La chaîne chapelet (String level)
- La chaîne insécable( liste non sécable)
- **La chaîne sécable**
- La chaîne terminale (chaîne dénombrable)

### Chaîne sécable

Sept, huit, neuf, dix, onze, douze....

Développement de nouvelles habiletés :

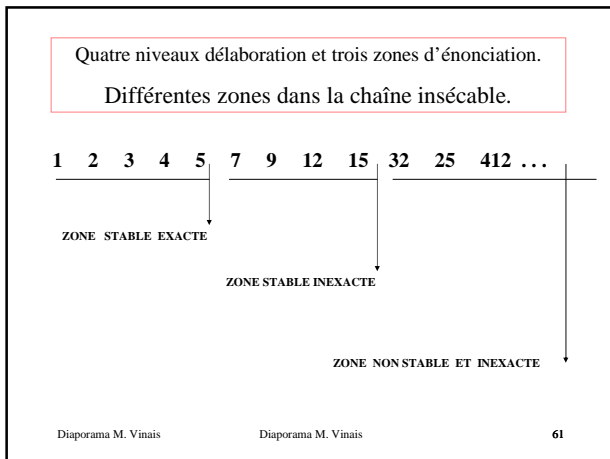
- \* Compter à partir de x
- \* Compter de x à y
- \* Comptage par bonds
- \* Compter à rebours
- \* Livrer le prédécesseur d'un nombre

### Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale (2)

*K. Fuson & al (1982)*

- La chaîne chapelet (String level)
- La chaîne insécable( liste non sécable)
- La chaîne sécable
- **La chaîne terminale (chaîne dénombrable)**





Les procédures de quantification.  
(Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

NB : selon le niveau de développement des compétences des élèves, d'autres procédures de quantification vont voir le jour c'est la capacité à agir sur le numérique : addition, soustraction....

Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 63

Les procédures de quantification.  
(Klarh et Wallace)

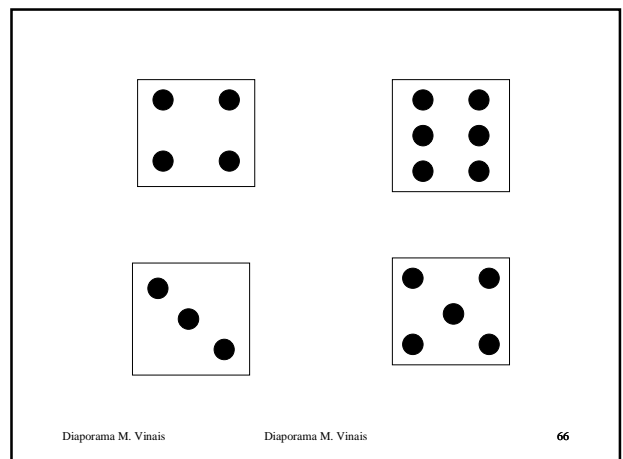
- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 64

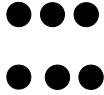
Les procédures de quantification.  
(Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
  - Configurations figuratives
  - Configurations non-figuratives

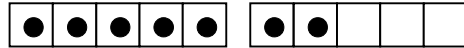
Diaporama M. Vinais Diaporama M. Vinais 65



Intérêts et limites des constellations figuratives

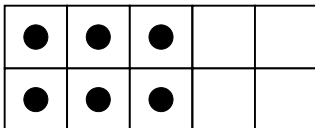
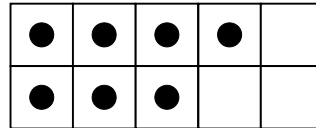


Limites de disposition linéaire

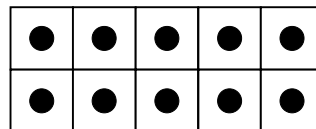


NB : Collections témoins

Les cartes à points

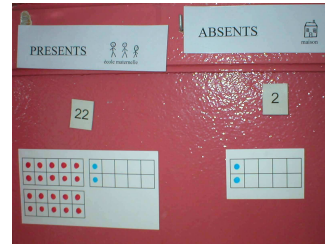


L'observation de la carte à points du nombre 6 permet de voir, entre autres propriétés ...





Diaporama M. Vinais



Diaporama M. Vinais

### Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage. (Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

Diaporama M. Vinais

Diaporama M. Vinais

### Procédure de quantification



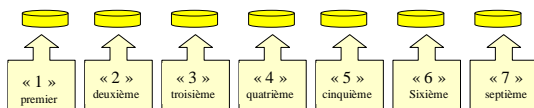
Le comptage est la procédure de base permettant d'évaluer de manière très précise des collections dont la taille importe peu. Il semble se manifester très tôt chez l'enfant. Pourtant on relève de nombreuses erreurs: on a à faire à des sujets qui à la fois savent et ne savent pas compter.

Diaporama M. Vinais

Diaporama M. Vinais

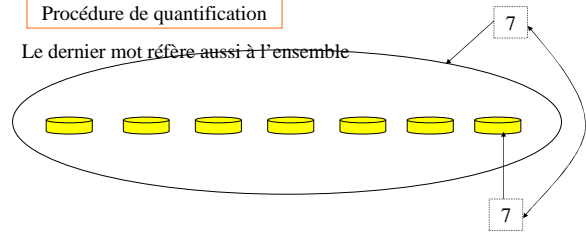
### Procédure de quantification

#### 2. Type de difficulté rencontrée



### Procédure de quantification

Le dernier mot réfère aussi à l'ensemble



Accepter de conceptualiser contre une connaissance... donc de « force », par répétition ou imitation  
La question du combien...



Diaporama M. Vinais

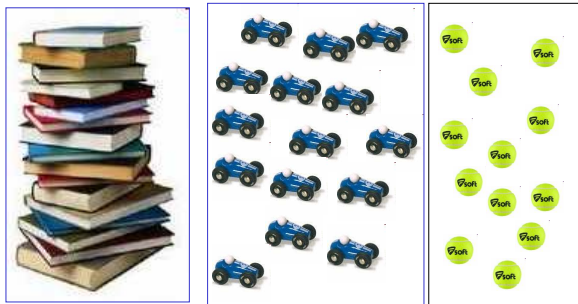
Diaporama M. Vinais

Procédure de quantification



Les procédures de quantification.  
(Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.



Une difficulté : le sens  
intrinsèque du nombre et  
son sens extrinsèque

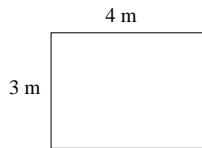
Différents "sens" du nombre et leur incidence sur la  
pratique d'activités mathématiques

- Sens intrinsèque
- Sens extrinsèque
  
- Sens connoté
- Sens incarné
- Sens inconscient

Quel le prix de 4 dvd sachant que leur  
prix unitaire est de 28€ ?

$$4^{\text{dvd}} \times 28^{\text{€}} = 112^{\text{dvd}}$$

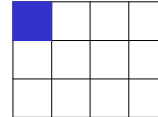
Aire de la surface du rectangle :  $L \times l$



Calcul de l'aire :

$$4 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$$

Aire de la surface du rectangle :  $L \times l$



Calcul de l'aire :

$$1 \text{ u} \times 4 \times 3 = 12 \text{ u}$$

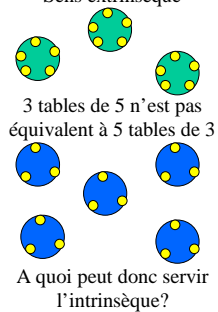
Sens intrinsèque

$$3 \times 5$$



$$5 \times 3$$

Sens extrinsèque



### L'invariance du nombre.

Alors que l'on (J.Piaget, P. Gréco...) a longtemps considéré les activités de dénombrement comme secondaires par rapport au caractère fondamental de la conservation des quantités discontinues, de nouvelles approches (Pénnington, J Grégoire...) nous amènent à une plus grande mesure. Il a été mis en évidence que:

- Le développement des habiletés numériques ne dépendrait pas de l'accès préalable à la conservation du nombre mais plutôt à une stabilité des images mentales...
- Autre constat : le fait d'inciter des sujets à quantifier par comptage avant de les soumettre aux épreuves de conservation (dont ils ne sont pas avertis) entraînerait une amélioration très sensible et systématique des performances (Cf K Fuson)
- Problème de la quotité et de la quantité mis en évidence par P. Gréco
- Dès lors, le problème de la conservation ne semblerait plus devoir se poser. Et pourtant....

Aperçu de la théorie "constructive" de Von Glaserfeld.

(Steffe et Glaserfeld 1985)

#### L'opération unifiante :

Il n'y aurait pas de nombre possible sans la construction mentale de la totalité.

#### La construction de l'unité :

L'unité n'est pas donnée d'emblée, l'unité d'un comptage est une création mentale.

#### L'itération :

L'enfant doit apprendre que la relation de succession sur les mots-nombres ("sept" est le suivant de "six"), signifie, au niveau des nombres, l'ajout d'une unité, c'est un de plus que six.



Outil : la planche numérique

Travail sur NM

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      91

Travail sur NM

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      92

Travail sur NM

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      93

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      94

Diversifier les sollicitations cognitives...

Activités sur le nombre  
Mémorisation numérique

Activités qui ne doit guère durer plus de 2 à 3 minutes

- Mémoire auditive
- Mémoire visuelle
- Mémoire sélective

Diaporama M. Vinais      Diaporama M. Vinais      95

**Base et position**  
**Structuration opératoire**  
**Un outil : l'abaque**

Diaporama M. Vinais

## Base et position

Quelques observations sur la base.

Regroupement par 10 (Car base 10) :

- Pourquoi la base dix ? (Cf histoire de la numération... les élèves sont preneurs! Cf R. Charnay Cap Maths). Communauté d'apprenants...
- Cela fait appel à ce qu'on appelle en mathématiques la relation d'équivalence. Ce travail sur la relation d'équivalence est initié dès l'école maternelle... et cela a toute son importance! Car sans ce travail préalable avec accès à une compréhension empirique, il y aura des problèmes de certitude lors du travail sur les regroupements...

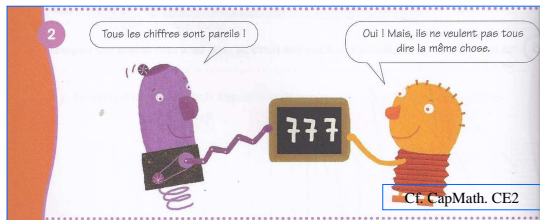
## Base et position

Quelques observations sur la position.

- Pourquoi la position ? (Cf histoire de la numération... les élèves sont preneurs! Cf R. Charnay Cap Maths). Communauté d'apprenants...
- Travailler le lien base/position en travaillant sur la base
- Codage couleurs ?

... 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 ...

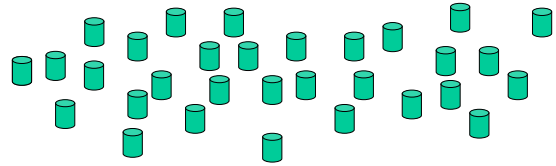
... 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 ...



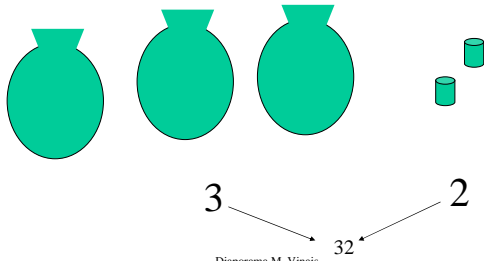
44

44

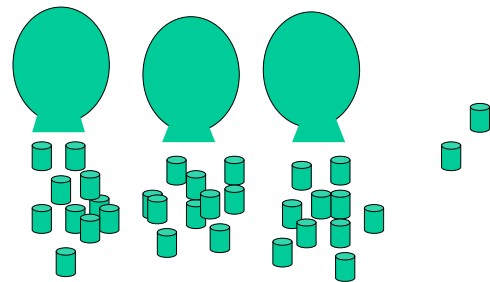
## Travail sur le regroupement par dix



## Travail sur le regroupement par dix

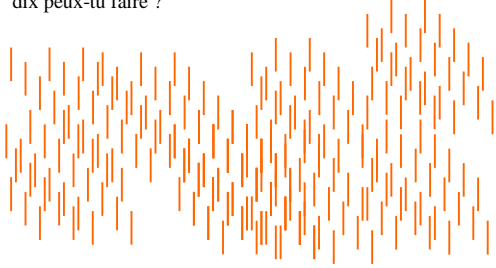


## Travail sur le regroupement par dix



## Travail sur le regroupement par dix

Si je te donne tous ces objets combien de paquets de cent et de dix peux-tu faire ?



Diaporama M. Vinois

103

## Travail sur le regroupement par dix

Utilisation de différents matériels pour accommoder les connaissances numériques : bâtonnets, multibases...

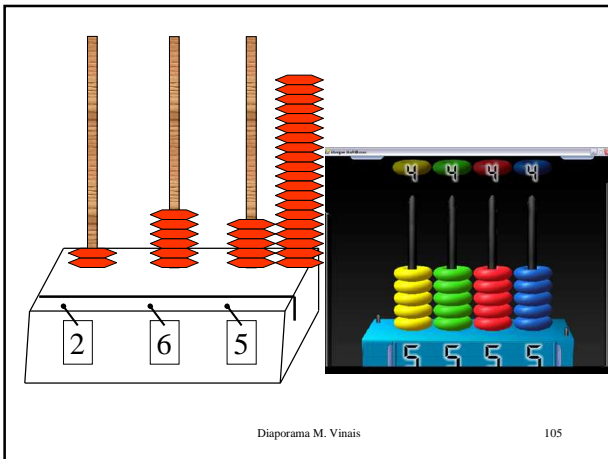


Utilisation de l'abaque?



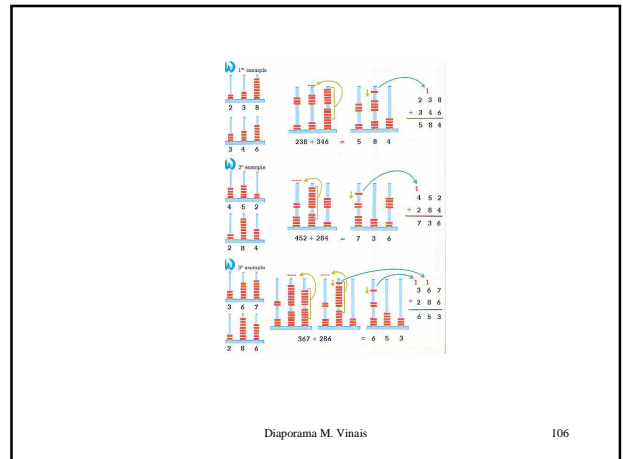
Diaporama M. Vinois

104



Diaporama M. Vinois

105



Diaporama M. Vinois

106

## Restructuration opératoire Utilisation de l'abaque

Tps 1 : Histoire de l'abaque et des abacistes  
 Tps 2 : Appropriation de l'abaque  
 Tps 3 : Compter sur l'abaque  
 Tps 4 : Restructuration opératoire : l'addition  
 Tps 5 : Restructuration opératoire : la soustraction



## Approche des fractions et ses difficultés



