



Les nouveaux programmes de l'école primaire

**Mathématiques
Document d'accompagnement**

Les problèmes pour chercher

Les problèmes pour chercher¹

Comme les précédents, les programmes 2002 mettent « *la résolution de problèmes au centre des activités mathématiques de l'élève* ». Le programme établit une liste de compétences générales concernant la résolution de problèmes à acquérir en fin de cycle : voir le BO hors - série n° 1 du 14 février 2002, page 53 (cycle 2) et page 84 (cycle 3). Les documents d'application précisent la place que doit avoir la résolution de problèmes dans les apprentissages (pages 13 et 14 pour le cycle 2, page 13 pour le cycle 3).

Pour mieux situer notre propos, voici trois extraits des introductions des documents d'application concernant les activités de recherche (texte commun aux cycles 2 et 3, pages 7 et 8 : « Une place centrale pour la résolution de problèmes ») :

« Dès l'école élémentaire, les élèves peuvent être confrontés à de véritables problèmes de recherche, pour lesquels ils ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problème qui est privilégiée dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter. Ces situations peuvent enrichir leur représentation des mathématiques, développer leur désir de chercher, leurs capacités de résolution et la confiance qu'ils peuvent avoir dans leurs propres moyens. »

« Dans ces activités, l'enseignant doit créer les conditions d'une réelle activité intellectuelle des élèves... Les élèves doivent être mis en situation de prendre en charge les différentes tâches associées à la résolution d'un problème :

- *faire des hypothèses, les tester ;*
- *élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle ;*
- *vérifier par eux-mêmes les résultats obtenus ;*
- *formuler une réponse dans les termes du problème ;*
- *expliquer leurs méthodes, les mettre en débat, argumenter. »*

« Les séances d'enseignement comportent en général différentes phases, avec des modes d'organisation diversifiés. Les phases de recherche sont souvent plus efficaces et plus riches si elles sont conduites en petits groupes, facilitant la confrontation des idées entre pairs et favorisant l'intérêt de tous les élèves pour la tâche proposée. »

Plusieurs fonctions pour la résolution de problèmes

Quatre types de problèmes sont évoqués et peuvent être associés à des objectifs d'apprentissage différents.

- Problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance.
- Problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer.
- Problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances.
- Problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.

Dans ce dernier cas, nous parlerons de « problèmes pour chercher » alors que dans les précédents nous pourrions parler de « problèmes pour apprendre », en soulignant l'aspect réducteur de ces dénominations, puisque, dans tous les cas, l'élève mobilise des connaissances et se trouve placé en situation de recherche.

Un épisode de recherche, en actes

10 h - Acte 1 : La maîtresse partage sa classe de CM1-CM2 en cinq groupes de quatre élèves et un groupe de trois élèves. Installés autour des tables qui ont été rapprochées pour la circonstance, les élèves écoutent la maîtresse présenter le problème qu'ils vont résoudre : « *Voici un jeu de cartes. Sur chaque carte est dessiné soit un carré, soit un triangle* ». La maîtresse montre les cartes et amène les élèves à remarquer qu'il y a un 4 dans les coins des cartes portant un carré et un 3 dans les coins de celles portant un triangle : c'est le nombre de côtés des figures concernées. « *Je vais passer avec mon jeu de cartes et chaque groupe choisira trois cartes, sans les regarder, et les mettra dans cette boîte* ». La maîtresse passe dans la classe et chaque groupe met au fur et à mesure ses trois cartes dans la boîte. De retour à son bureau, la maîtresse demande à la classe le nombre de cartes qu'il y a dans la boîte. « *On est six groupes et trois cartes par groupe. Il y a donc 18 cartes* » répondent les élèves les plus rapides. La maîtresse confirme et note cette information au tableau. Elle prend alors les cartes une à une, sans les montrer aux élèves et, en les remettant dans la boîte, elle annonce : « *J'ai compté le nombre total*

¹ Ce document a été élaboré par la Commission mathématique rattachée au Groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire. Cette commission, pilotée par Roland Charnay, est composée de Mmes Luce Dossat, Catherine Houdement, Nicole Matulik et de M. Jean Fromentin, Guy Pigot et Paul Planchette.

de côtés sur les cartes que vous avez choisies et j'en trouve 60 (et elle écrit : " 60 côtés " au tableau). Vous devez trouver le nombre de cartes portant des carrés et le nombre de cartes portant des triangles ». La maîtresse indique aux élèves les conditions dans lesquelles ils vont effectuer cette recherche : 5 minutes de recherche personnelle, puis une demi-heure de recherche en groupe. La maîtresse poursuit : « Il faudra donc échanger, discuter des propositions des uns et des autres, et arriver à une seule production qui sera présentée à toute la classe sous la forme d'une affiche. Chaque groupe devra expliquer son affiche ». Et la maîtresse conclut : « Je ne donnerai aucun renseignement pendant votre travail. Je déciderai en temps voulu qui, dans chaque groupe, sera le rapporteur du groupe. Vous avez cinq minutes pour chercher personnellement ».

10 h 15 - Acte 2 : La recherche personnelle commence. Certains dessinent des triangles et des carrés, d'autres écrivent les informations du tableau comme pour bien s'en imprégner, d'autres posent des opérations ; les uns réfléchissent, d'autres soupirent, d'autres enfin semblent attendre que le travail en groupe commence !

10 h 20 - Acte 3 : La maîtresse donne le signal du travail en groupe. Les voix s'élèvent, la classe s'anime. On peut entendre çà et là : " C'est pas possible ", " On peut pas savoir ", " Ça dépend ", " Il faut faire une division ". Les échanges s'engagent dans les groupes. Dans un premier groupe : " Il y a 15 carrés " ; " Non, il doit y avoir aussi des triangles " ; " Oui, mais on ne sait pas combien ". Dans un deuxième groupe : " Il y a 10 triangles et 8 carrés " ; " Non ! Ça fait pas 60 côtés ! " ; " J'essaie avec 10 carrés et 8 triangles ; ... non ça fait 64 côtés " ; " Mets moins de carrés et plus de triangles ". Dans un troisième groupe : " Il y a 20 triangles " ; " Mais non, il n'y a que 18 cartes " ; " Il faut enlever des triangles et mettre des carrés " ; " 4 triangles, c'est comme 3 carrés " ; Dans un quatrième groupe : " S'il y a que des carrés, ça fait 72 côtés. Il faut donc enlever trois carrés ! " ; " Oui mais il faut les remplacer par trois triangles " ; " Ça fait alors 69 côtés " ; " Il faut continuer ! ". Dans un autre groupe : " Si on essayait 9 triangles et 9 carrés ? " ; " Ça fait trop de côtés, 63 ! " ; " Il faut moins de carrés ".

Les échanges se poursuivent. Les élèves se sont maintenant bien approprié le problème, et s'investissent davantage dans sa recherche. Pendant ce temps, la maîtresse passe discrètement de groupe en groupe, veille à ce que chaque élève participe à la réflexion du groupe, écoute les arguments développés, les affirmations annoncées, regarde les essais sur les feuilles de recherche, mais n'apporte pas d'éléments susceptibles d'orienter le travail des élèves. Certains groupes privilégient le nombre de cartes, d'autres privilégient le nombre de côtés. Ces observations lui permettront de mieux gérer la mise en commun qu'elle va organiser. Mais déjà, elle voit se dessiner des procédures qui peuvent aboutir à la solution.

10 h 40 - Acte 4 : Non sans difficulté, la maîtresse demande une pause à tous les groupes, pour faire un premier bilan des recherches. Chaque groupe décide de son porte-parole qui indique où en est le groupe, ce qu'il a trouvé. Parfois les propos du rapporteur sont contestés par les élèves de son groupe. Un groupe annonce qu'il a trouvé plusieurs solutions. Un autre affirme que ce n'est pas possible avec 18 cartes. La maîtresse rappelle qu'il y a bien 18 cartes et qu'elle a bien compté 60 côtés. « Il faut faire 60 moins 18 ! » s'exclame un élève aussitôt contrecarré par ses camarades. Un autre groupe fait remarquer que 4 triangles ont le même nombre de côtés que 3 carrés. Un autre est content d'annoncer que si on change un carré par un triangle, le nombre de cartes reste le même, mais le nombre de côtés diminue de 1. La maîtresse annonce alors qu'elle leur laisse un quart d'heure pour finir leur recherche et préparer la présentation de leur proposition sur l'affiche.

10 h 50 - Acte 5 : Forts de tous les renseignements obtenus à l'occasion de ce premier bilan, les groupes se remettent au travail. Les uns reprennent leur procédure et l'affinent ; d'autres explorent de nouvelles pistes. La maîtresse observe à nouveau les travaux des groupes sans intervenir, seulement pour rappeler à l'ordre des élèves ou des groupes qui gênent le travail de la classe par leur comportement. Elle leur rappelle qu'ils doivent présenter leur proposition sur une affiche et repère les différentes méthodes.

11 h 05 - Acte 6 : C'est le moment de la **mise en commun**. La maîtresse désigne le rapporteur de chaque groupe. Celui-ci présente la proposition de son groupe.

Un premier groupe (G 1) donne des possibilités de faire 60 côtés : « Que des carrés : $15 \times 4 = 60$; on n'a que 15 cartes. Que des triangles : $3 \times 20 = 60$; on a 20 cartes. On a essayé 12 carrés et 4 triangles puis 9 carrés et 8 triangles. Mais on n'y arrive pas ! »

Un deuxième groupe (G 2) a considéré le nombre de côtés avec 10 carrés et 8 triangles : 64 côtés. « Quatre côtés en trop, il faut un carré en moins. La réponse est 9 carrés et 8 triangles ».

Un troisième groupe (G 3) a supposé que toutes les cartes étaient des triangles. « 18 triangles, ça fait 54 côtés. On a enlevé 6 triangles et on les a remplacés par des carrés pour faire six côtés de plus. On a trouvé : 12 triangles et 6 carrés ».

Un autre groupe (G 4) a organisé sa recherche en faisant varier le nombre de cartes de chaque figure à partir de 9 triangles et 9 carrés :

9 triangles et 9 carrés donnent : $9 \times 3 = 27$ et $9 \times 4 = 36 + 27 = 63$ côtés.

10 triangles et 8 carrés donnent : $10 \times 3 = 30$ et $8 \times 4 = 32 + 30 = 62$ côtés.

11 triangles et 7 carrés donnent : $11 \times 3 = 33$ et $7 \times 4 = 28 + 33 = 61$ côtés.

12 triangles et 6 carrés donnent : $12 \times 3 = 36$ et $6 \times 4 = 24 + 36 = 60$ côtés.

Les autres groupes ont trouvé des solutions voisines, correctes ou non. La maîtresse invite chaque groupe à réfléchir, à noter ses questions et les remarques à faire aux autres groupes, puis lance le débat. « Quelles remarques pouvez-vous faire sur les propositions de vos camarades ? »

Les uns voient l'erreur du groupe (G2) : « *Ils n'ont pas le bon nombre de cartes !* ». D'autres font remarquer, en parlant du groupe (G1) : « *S'ils avaient continué, ils y seraient arrivés !* ». D'autres encore signalent les écritures incorrectes du groupe (G4) qui se défend en argumentant du bon nombre de côtés pour chaque cas. C'est l'occasion pour la maîtresse d'ouvrir un débat sur les différents types d'erreurs : erreur dans le choix ou l'exécution de la procédure de résolution pour certains, erreur dans l'écriture de la solution pour d'autres.

D'autres élèves ne comprennent pas la procédure du groupe (G3). Les élèves du groupe donnent alors des explications en dessinant des cartes au tableau et en montrant qu'en remplaçant un triangle par un carré, on augmente le nombre de côtés de 1 sans changer le nombre de cartes.

Le débat se poursuit sur l'unicité de la réponse : « *Y a-t-il d'autres cas où on a 18 cartes et 60 côtés ?* ». La maîtresse relance la recherche sur cette nouvelle question. A l'issue de ce nouveau temps de recherche, deux argumentations s'imposent : celle qui repose sur l'échange d'une carte « carré » par une carte « triangle » [explication du groupe (G3)] et celle qui repose sur l'exhaustivité [procédure du groupe (G4)].

11 h 40 – Validation et synthèse : Voici le moment tant attendu, celui où on va vérifier la validité de la réponse, même si tous les élèves sont maintenant convaincus de cette réponse. La maîtresse ouvre la boîte et un élève sort les cartes une à une en annonçant au fur et à mesure “ triangle ” ou “ carré ”. Un autre élève les comptabilise au tableau. Le compte y est : “ *12 triangles et 6 carrés* ”.

La maîtresse demande enfin s'il était possible de vérifier la réponse sans ouvrir la boîte : $12 + 6 = 18$ prouve que le nombre de figures est correct et $(12 \times 3) + (6 \times 4) = 60$ prouve que le nombre de côtés l'est également. Elle pointe ces égalités comme un autre moyen de prouver la validité de la réponse.

La maîtresse demande maintenant aux élèves ce qu'ils pensent de cette séance de problème. « *On savait pas faire et on a trouvé quand même !* » s'étonne un élève. « *C'est bien de pouvoir deviner sans voir les cartes* » annonce un autre élève. « *Et comment avez-vous pu y arriver ?* » rebondit la maîtresse. La formulation de réponses complètes à cette question nécessite des relances de la part de l'enseignante, avec des retours sur la phase de résolution. Avec leur propre langage repris par la maîtresse, les élèves évoquent la nécessité de faire des essais et de rectifier les choix en fonction des résultats, c'est ce que nous appellerons les « **essais - ajustements** ». Ils font remarquer combien il faut être **méthodique, organisé**, qu'il ne faut pas avoir peur d'écrire des résultats provisoires qui peuvent s'avérer inutiles pour la réponse mais en revanche très utiles pour la recherche. A tout moment, il est utile de contrôler sa proposition pour vérifier si elle respecte les contraintes du problème.

Une semaine plus tard : La maîtresse met en place les six mêmes groupes : « *Vous vous souvenez des cartes sur lesquelles étaient dessinés des carrés ou des triangles ? Que fallait-il trouver ?* » Les élèves rappellent qu'il y avait 18 figures et 60 côtés et qu'il fallait trouver le nombre de figures de chaque sorte. « *Aujourd'hui, chaque groupe va être le propriétaire d'une basse-cour composée uniquement de poulets et de lapins. Je vais indiquer à chaque groupe la composition de sa basse-cour. Notez bien les renseignements. Groupe 1 : 26 têtes et 86 pattes* ». Un brouhaha naît aussitôt dans la classe. La maîtresse satisfaite de son effet interpelle les élèves sur le nombre de pattes d'un lapin, d'un poulet, et les élèves se rendent à l'évidence qu'il faudra trouver le nombre d'animaux de chaque sorte. La maîtresse redonne la composition de la basse-cour du groupe 1 puis poursuit avec celles des autres groupes. Pour les groupes 5 et 6 qui avaient eu du mal à résoudre le problème de la semaine précédente, elle a choisi un petit nombre d'animaux et des nombres voisins de poulets et de lapins, ce qui réduit le nombre de cas à envisager : « *Groupe 2 : 25 têtes et 66 pattes ; Groupe 3 : ; Groupe 5 : 14 têtes et 44 pattes ; Groupe 6 : 17 têtes et 48 pattes* ». Comme la semaine précédente, les élèves vont chercher individuellement puis en groupe et présenteront leur solution, sous la forme d'une affiche, à toute la classe. Mais la maîtresse pourra peut-être se dispenser de faire un bilan en cours de recherche.

Les élèves ne manquent pas d'imagination, ni de perspicacité. Il faut seulement leur donner la possibilité de l'exprimer.

Caractéristiques du « problème pour chercher »

- « *Les situations sur lesquelles portent les problèmes proposés peuvent être issues de la classe, de la vie courante, de jeux, d'autres domaines de connaissances ou s'appuyer sur des objets mathématiques. Elles sont présentées sous des formes variées : expériences concrètes, description orale, support écrit* » [BO hors – série n° 1 du 14 février 2002, page 82 (cycle 3)]. Il ne faut pas en effet négliger cette variété au niveau de la présentation, y compris pour les « problèmes pour chercher ». Un problème n'est pas nécessairement donné sous la forme d'un texte suivi d'une question écrite comme pourraient le laisser croire les pratiques les plus courantes. En effet l'écrit peut déjà être, pour certains élèves, un obstacle à la compréhension de la situation. Or il faut garder à l'esprit que l'objectif essentiel ne se situe pas dans la lecture mais dans la résolution du problème. Le problème peut consister en la fabrication d'un objet (dessins, solides, assemblages...) sous certaines contraintes. Il peut être présenté par une situation mimée dont on demande d'anticiper la suite ou par une question formulée oralement (en particulier au cycle 2).
- Les élèves doivent pouvoir s'approprier facilement la situation et se représenter la tâche pour s'y engager avec leurs connaissances antérieures. La difficulté doit se situer non dans la compréhension de la situation, mais dans les moyens de répondre à la question posée.

- Le problème peut se situer dans les domaines numérique, géométrique, logique, dans celui de la mesure ou dans plusieurs de ces domaines.
- Le problème doit être « consistant », c'est-à-dire présenter une certaine « résistance ». Il ne doit pas donner lieu à une réponse qui résulte d'un traitement immédiatement reconnu. Ainsi, la solution experte du problème décrit dans le récit précédent est la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues qui ne sera étudiée qu'en dernière année du collège.
- Donner un problème de recherche, c'est lancer un défi. Il est important que les élèves « fassent leur » le problème et qu'ils aient envie de relever le défi. De ce point de vue, l'attitude du maître est aussi décisive que le choix du problème. La « mise en scène » qu'il a imaginée conditionne l'engagement des élèves à relever le défi. Cet engagement dans la tâche est souvent plus aisé si les élèves sont persuadés qu'il existe une solution, parce qu'ils ont vu le problème se créer (comme dans l'exemple du problème des cartes) : ils sont ainsi mieux à même de se représenter la situation. Cependant, tous les problèmes ne peuvent pas être proposés dans les mêmes conditions que celui évoqué ci-dessus.
- La validation de la solution doit être le plus possible à la charge des élèves. Ils doivent pouvoir se rendre compte par eux-mêmes du bien-fondé ou non de leur réponse, par l'échange d'arguments destinés à défendre ou contredire une proposition, par des contrôles tout au long de leur recherche, et, si possible, par une vérification, à la fin, sur la situation elle-même.

Pourquoi des « problèmes pour chercher » à l'école primaire ?

Cinq objectifs différents peuvent être dégagés.

- 1) La pratique du « problème pour chercher » développe la capacité de l'élève à **faire face à des situations inédites**.
- 2) Dans la résolution de ces problèmes, l'élève prend conscience de **la puissance de ses connaissances**, même si celles-ci sont modestes. Il existe en effet toujours plusieurs moyens d'élaborer une réponse, faisant appel à des registres de connaissances différents : ainsi, dans le problème des cartes, certains élèves peuvent dessiner les figures et dénombrer, d'autres n'utiliser que l'addition et certains combiner toutes les opérations étudiées.
- 3) L'activité de l'élève dans la résolution d'un « problème pour chercher » valorise **des comportements et des méthodes** essentiels pour la construction de leurs savoirs : prendre des initiatives (tenter, faire des essais...), être critique vis-à-vis de son travail (contrôler, analyser ses erreurs...), s'organiser, être méthodique (réduire le hasard, le nombre de cas à envisager), communiquer (par oral, dans le groupe et face à la classe, par écrit pour rendre compte de sa recherche).
- 4) Les phases d'échanges et de débats développent les **capacités argumentatives** de l'élève. Les **débats** qui s'instaurent soit dans les groupes, soit dans la classe conduisent les élèves à valider ou réfuter une proposition. Un élève qui est persuadé du bien-fondé de son idée, de l'intérêt de la piste qu'il veut explorer, ou de la solution qu'il a trouvée, devra convaincre ses camarades. La raison doit l'emporter sur la passion. Pour cela, le maître doit gérer les débats de telle façon que ce soit la valeur de l'argument qui l'emporte. Ni la force de conviction de celui qui le défend, ni le fait que cet argument soit accepté par la majorité des élèves ne doivent être décisifs quant à la validité d'un argument : en mathématiques, l'accord du plus grand nombre sur une proposition ne constitue pas un critère de sa validité.
- 5) Ce type d'activité contribue à **l'éducation civique** des élèves. Les moments de recherche sont plus efficaces si on s'entraide : les idées proposées par les uns, même erronées, alimentent celles des autres. Les moments de débats offrent également l'occasion de travailler l'écoute, la prise en compte et le respect de l'autre.

Les modalités de mise en œuvre du « problème pour chercher »

Plusieurs phases ponctuent, en général, une séance de « problème pour chercher ».

Présentation du problème. Comme cela a été signalé précédemment, le problème peut être communiqué oralement (avec l'aide d'un écrit) ou seulement par écrit (texte, schémas, tableaux, illustrations), avec ou sans matériel. Les élèves ne doivent pas pouvoir résoudre le problème uniquement en manipulant le matériel. Par contre, sa présence peut les aider à se représenter le problème et, à la fin, permettre une vérification pratique de la solution. Il faut en effet veiller à ce que les élèves comprennent la situation et ce qu'il faut chercher pour qu'ils se sentent personnellement engagés pour relever le défi qui leur est lancé.

Temps de recherche personnelle, puis en groupe. Une confrontation personnelle de chaque élève avec le problème est souvent nécessaire (environ 5 minutes). Même si, en apparence, elle est peu productive pour certains, cette phase individuelle initialise le travail de groupe dont l'objectif est de produire une proposition de solution (procédure et réponse) commune. Les échanges à l'intérieur du groupe sont un élément essentiel de cette phase, les propositions des uns alimentant celles des autres. Il faut que chacun se sente responsable de la

proposition de solution qui sera présentée à la classe par le rapporteur du groupe : pour cela, le maître peut choisir le rapporteur seulement à la fin de la recherche.

Mise en commun, débat et validation. Cette phase peut se situer à l'issue de la recherche ou dans la séance suivante, ce qui permet à l'enseignant de prendre connaissance des travaux de chaque groupe. Au cours de cette mise en commun, les rapporteurs, désignés par le maître, présentent aux autres groupes leur solution. Les choix du maître dans la désignation des rapporteurs et dans leur ordre de passage² reposent sur les observations faites pendant la recherche. Le moment de débat peut être organisé de diverses façons : les échanges peuvent intervenir au fur et à mesure de la présentation des productions ou seulement lorsque toutes les propositions ont été présentées. L'échange organisé autour de plusieurs propositions contribue à enrichir l'argumentation : les élèves peuvent repérer des démarches voisines et confronter celles qui sont différentes.

Il est souhaitable que la validation des propositions soit faite par les élèves eux-mêmes. Dans l'exemple proposé, cette validation peut être confirmée par vérification de la conformité des réponses avec les informations données ou par un contrôle du contenu effectif de la boîte, ce qui contribue à l'intérêt de ce problème. Pour que la validation relève effectivement de la responsabilité des élèves, le maître doit éviter autant que possible de donner un avis d'autorité. Il doit, bien entendu, veiller à une certaine rigueur dans l'expression avec des exigences adaptées au niveau de la classe. Pour cela, il peut questionner, interpellé les uns ou les autres pour inciter les uns à argumenter et les autres à s'interroger sur la validité d'une proposition.

Synthèse. Il s'agit maintenant de conclure la séance, sous forme d'échanges entre le maître et la classe, de valoriser les qualités observées, de dénoncer les défauts, d'ancrer les comportements essentiels et les procédures intéressantes qui pourront être réinvesties dans une prochaine séance de « problème pour chercher ».

Le rôle de l'enseignant. Pendant une séance de « problème pour chercher », le maître n'apporte aucune aide sur la résolution du problème, ce qui ne veut pas dire qu'il est totalement absent de l'activité. Au bout d'un moment, il circule, observe, note des éléments intéressants. Ces observations l'aideront à décider éventuellement d'une courte mise en commun intermédiaire et du choix des travaux les plus intéressants à exploiter collectivement, ainsi que de l'ordre le plus pertinent pour cette exploitation. Le maître ne doit pas aider personnellement les élèves afin qu'ils n'attendent pas systématiquement un coup de pouce de sa part. Des aides peuvent venir des élèves eux-mêmes. Par exemple, un premier mini-débat peut être instauré, dans le but de porter à la connaissance de tous les groupes les différentes recherches, de les amener à avoir un regard critique sur leur propre recherche et de les re-dynamiser si leur recherche piétine. Pendant les phases de débat, le maître doit plutôt se placer au milieu des groupes ou en fond de classe pour que les échanges se fassent réellement entre les élèves et non pas entre le maître et les élèves.

Prolongement. Certains groupes auront résolu le problème, d'autres pas. Pour exploiter pleinement une telle séance, le maître peut "rebondir" sur cette recherche et proposer dans une séance ultérieure, des problèmes du même type que le précédent mais avec des données adaptées aux difficultés rencontrées par les groupes dans la recherche précédente. Forts des procédures discutées précédemment, ils peuvent utiliser, en l'améliorant éventuellement, leur proposition de solution antérieure, en choisir une autre ou en élaborer une nouvelle. Les groupes qui n'avaient pas abouti ont l'occasion de progresser. Il est également possible, dans cette phase, de procéder à une redistribution des groupes.

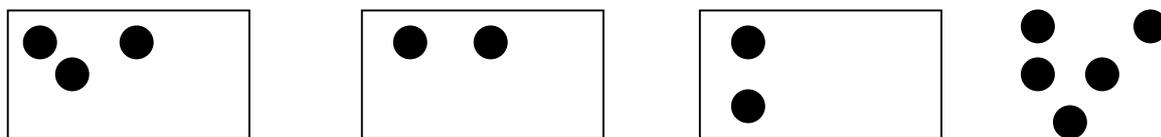
Des « problèmes pour chercher » à tous les niveaux de l'école primaire

La pratique du « problème pour chercher » n'est pas réservée aux élèves du cycle 3. Bien au contraire, dès l'école maternelle, et ensuite au cycle 2, cette pratique doit être encouragée.

A l'école maternelle

La plupart des questions posées aux élèves de l'école maternelle sont des « problèmes pour chercher ». En effet, les élèves ont, à ce moment de leur scolarité, construit peu de connaissances mathématiques. Pour traiter les problèmes qui leur sont proposés, ils doivent donc se débrouiller, faire preuve d'inventivité.

Ainsi, un élève de moyenne section doit compléter ces trois cartons (où des gommettes sont déjà collées) en utilisant tout le tas de gommettes mis à disposition pour que chacun comporte à la fin exactement autant de gommettes que chacun des deux autres. Il aura pu auparavant résoudre un problème identique lié à la vie de la classe, avec des objets déplaçables (par exemple, égaliser le contenu de trois assiettes, avec des biscuits).



² Il est peu pertinent de situer en fin de présentation des solutions erronées, à un moment où tout le monde est déjà convaincu par une solution correcte.

Cet élève ne dispose que de la capacité à comparer des collections par correspondance terme à terme ou, peut-être, de la capacité à les dénombrer par comptage un par un. Il est donc peu probable qu'il puisse anticiper le résultat ; la seule possibilité pour lui consiste à poser les gommettes sur les cartons, à contrôler si la contrainte d'équité est respectée et à procéder à des ajustements... ou à enlever les cinq gommettes qu'il vient de placer pour se lancer dans une nouvelle tentative.

Un élève de grande section peut être confronté à une situation identique, mais dans laquelle les cinq gommettes ne sont pas directement à sa disposition. Elles sont, par exemple, affichées au tableau et il doit indiquer sur chaque carton combien il doit coller de gommettes supplémentaires (ou bien les dessiner). Alors que la situation dans sa version « Moyenne section » n'est peut-être plus pour lui un problème de recherche, car il peut produire la bonne solution rapidement, la nouvelle contrainte imposée l'oblige à un travail d'anticipation et à un maniement simultané des nombres et des quantités qui transforment la situation en un nouveau « problème pour chercher ».

À l'école maternelle, les élèves ne sont pas tous capables d'explicitier les démarches utilisées. Ils peuvent par contre être invités à « refaire l'action devant leur camarade », l'enseignant accompagnant, à ce moment, l'action de l'élève par le langage et offrant ainsi une verbalisation « miroir ». En revanche, les élèves deviennent progressivement capables de repérer une réponse erronée et de dire pourquoi elle ne convient pas.

Au cycle 2

Les problèmes pour chercher ont une importance toute particulière au cycle 2. Ils donnent aux élèves des occasions de prendre conscience que les premiers outils mathématiques qu'ils se sont appropriés leur permettent de traiter des problèmes « difficiles », leur résolution ne se limitant pas à l'application des connaissances étudiées. Ainsi, des élèves de 2^e année (ou même de 3^e année) de cycle 2, peuvent être invités à chercher plusieurs façons (voire toutes les façons) de répartir 34 objets dans des boîtes qui peuvent contenir 4 ou 6 objets. Ils deviennent progressivement capables de rendre compte de la démarche qu'ils ont utilisée en s'appuyant sur la trace écrite qu'ils ont élaborée et à repérer des erreurs dans la solution d'un autre élève. Ils ont souvent des difficultés à identifier que deux solutions sont identiques quand elles sont présentées différemment : il appartient à l'enseignant de les aider dans ces rapprochements. Les échanges entre élèves, au cours de la mise en commun, sont encouragés, mais l'enseignant est souvent amené à reformuler une proposition et à assurer le maintien de la discussion autour de celle-ci.

Au cycle 3

La gamme des problèmes possibles s'élargit. Les élèves deviennent capables de s'investir davantage dans la phase d'échange et de débat autour des démarches produites. Le travail sur l'argumentation s'enrichit. Défendre une proposition ou la contester deviennent de véritables enjeux, au cours des mises en commun, l'enseignant se limitant à organiser le débat, à permettre l'expression, la confrontation des points de vue et l'émergence d'éléments de preuve. Cette phase, difficile, est essentielle pour que les élèves entrent dans un débat scientifique et s'en approprient progressivement les règles. Elle ne se déroule pas nécessairement sur toute sa durée sous forme collective. Souvent, l'implication des élèves doit être relancée, l'enseignant les invitant à discuter par petits groupes, pendant un court moment, d'une proposition clairement identifiée et formulée avant de reprendre l'échange collectif.

Exemples de problèmes pour chercher

Les trois exemples qui suivent de « problèmes pour chercher » sont propices à la mise en œuvre de trois types de raisonnements différents à l'école élémentaire

Problème dont la résolution peut être faite par essais (essais et ajustements ou essais systématiques)

La tirelire (tiré de ERMEL CM2)

Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces et billets.

Je n'ai que des pièces de 2 € et des billets de 5 €.

Avec ces 32 pièces et billets, j'ai 97 €.

Combien y a-t-il de pièces de 2 € et de billets de 5 € dans ma tirelire ?

Ce problème peut être résolu par **essais et ajustements**, comme le problème des carrés et des triangles présenté précédemment. Il nécessite de savoir prendre en compte l'information apportée par les essais successifs pour engager un nouvel essai. Une procédure par essais systématiques est également possible, par exemple en faisant évoluer le nombre de pièces de 2 € de 1 en 1.

Problème dont la résolution nécessite une organisation pour obtenir toutes les possibilités

D'après Les glaces O.C.C.E. Aube – Les écoles qui mathent – Mai 1998 (fin de cycle 2 ou cycle 3)

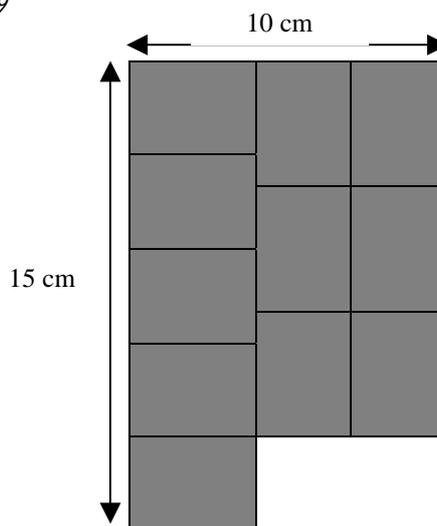
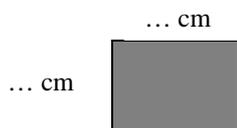
Trouve tous les mélanges possibles de glaces à trois boules différentes, avec cinq parfums : citron, vanille, chocolat, fraise, pomme.

Ce type de problème encourage à l'**organisation** des solutions pour s'assurer de leur exhaustivité. Par exemple, fixer la première boule sur « citron », puis la deuxième sur « vanille » et explorer toutes les possibilités pour la troisième. Puis, en gardant la première sur « citron », fixer la deuxième sur « chocolat » et explorer à nouveau les possibilités pour la troisième (en évitant de répéter un assortiment déjà trouvé)...

Problèmes dont la résolution privilégie le recours à la déduction

D'après Evaluation à l'entrée en Sixième – 1999 – exercice 29

Sophie veut découper des étiquettes rectangulaires toutes identiques dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 10 cm et 15 cm. Elle en a déjà tracé onze comme tu peux le voir sur le dessin. Calcule les dimensions réelles d'une étiquette et indique les sur le dessin ci-dessous.



Ce troisième problème met l'accent sur une compétence trop peu valorisée actuellement à l'école primaire : la **déduction** et l'**organisation des étapes** d'une résolution. Il faut, en effet d'abord déterminer la largeur d'une étiquette (à partir de l'information 15 cm qui correspond à « 5 largeurs »), puis en déduire sa longueur (à partir de l'information 10 cm qui correspond à « 2 largeurs et 1 longueur »).

La plupart des problèmes sont propices à plusieurs types de raisonnements. Ainsi, le problème suivant peut aussi bien être résolu par essais et ajustements que par une démarche déductive.

Les croquettes 2^{ème} rallye mathématique romand – 1994 (fin de cycle 2, cycle 3)

100 croquettes ont été réparties dans 5 assiettes.

Dans la 1^{ère} et la 2^{ème} assiettes, ensemble, il y a 52 croquettes.

Dans la 2^{ème} et la 3^{ème} assiettes, ensemble, il y a 43 croquettes.

Dans la 3^{ème} et la 4^{ème} assiettes, ensemble, il y a 34 croquettes.

Dans la 4^{ème} et la 5^{ème} assiettes, ensemble, il y a 30 croquettes.

Combien de croquettes y a-t-il dans chaque assiette ?

Où trouver de tels problèmes ?

La pratique du problème pour chercher commence à se développer sous plusieurs formes.

- Certains manuels intègrent de tels problèmes à leur progression.
- Des travaux de recherches (comme ceux de l'équipe ERMEL de l'INRP) fournissent également des exemples de mise en œuvre.
- Certaines productions de la COPIRELEM ou des revues pour les enseignants (comme la revue Grand N, éditée par l'IREM de Grenoble), par exemple un numéro spécial de la revue Grand N « Points de départ » (édité en 2003) propose des *Activités et problèmes mathématiques pour les élèves du cycle 3*.
- Les concours et les rallyes mathématiques organisés dans plusieurs régions de France ou dans d'autres pays sont une autre source d'inspiration pour l'enseignant : ces problèmes sont souvent disponibles en ligne sur le réseau Internet et peuvent être trouvés en utilisant un moteur de recherche. La revue suisse Math-école publie également les épreuves du rallye mathématique transalpin.