

Module TC CAPPEI D1

Didactique spécialisée des maths :
problématique des apprentissages
mathématiques.

Obstacles, difficultés, aides ?

Comprendre et intervenir



30 septembre 200020



Michel VINAIS

Ancien responsable filière ASH.
Université d'Orléans

Chargé de cours IFUCOME
Université d'Angers

michelvinais@orange.fr



Présentation rapide...

Cahier des charges de module :

« Identifier, analyser et prendre en compte les besoins éducatifs particuliers pour leur apporter des réponses pédagogiques et éducatives adaptées. »

« Exercer dans l'école inclusive comme personne ressource. »

Ici dans le champ de la didactique des mathématiques.

- Systèmes de numération : comprendre pour intervenir.
- ALM
- Pratiques de remédiation...Numérique, opératoire, ...
- Le passage de N+ à D
- Le concept de mesure ?
- Analyse réflexive de productions d'élèves.

JT De Santi (Les idéautés mathématiques)

Un « concept » mathématique n'est pas une chose, ce n'est pas une table ou un caillou, mais c'est un objet idéal...

Conférence de novembre 2014.

Selon S Dehaène, les recherches actuelles en neurosciences permettent de démontrer que nous sommes tous doués en maths. De quoi répondre à tous ceux qui pensent que « les maths ne sont pas faites pour eux » ?

Les nombres constituent un concept complexe et multidimensionnel. Une compréhension approfondie en numération nécessite non seulement la capacité de compter et de reconnaître les symboles, mais aussi une compréhension des rapports complexes entre « plus » et « moins » et entre « la partie » et « le tout », du rôle particulier de certains nombres comme cinq et dix, des liens entre les nombres, les quantités réelles et les mesures dans le milieu, etc.

(Ministère de l'Éducation et de la Formation de l'Ontario)

Quel est ce nombre ?

$$2 \times 10^3 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 7 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 8 \times 10^2$$

Quel est ce nombre ?

$$2 \times 10^3 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 7 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 8 \times 10^2$$

7302859

Quel est ce nombre ?

$$2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

Quel est ce nombre ?

$$2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

256

Quel est ce nombre ?

$$8 \times 10^3 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Quel est ce nombre ?

$$8 \times 10^3 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

8025

Écris les résultats des décompositions additives.

- $4\ 000 + 500 + 60 + 8 = 4\ 568$
- $7\ 000 + 400 + 20 + 9 = 7\ 429$
- $2\ 000 + 800 + 10 + 9 = 2\ 819$

Écris les résultats des décompositions multiplicative et additive.

- $(1\ 000 \times 5) + (100 \times 8) + (10 \times 4) + 9 = 5\ 849$
- $(1\ 000 \times 6) + (100 \times 2) + (10 \times 8) + 2 = 6\ 282$
- $(1\ 000 \times 9) + (100 \times 1) + (10 \times 2) + 8 = 9\ 128$



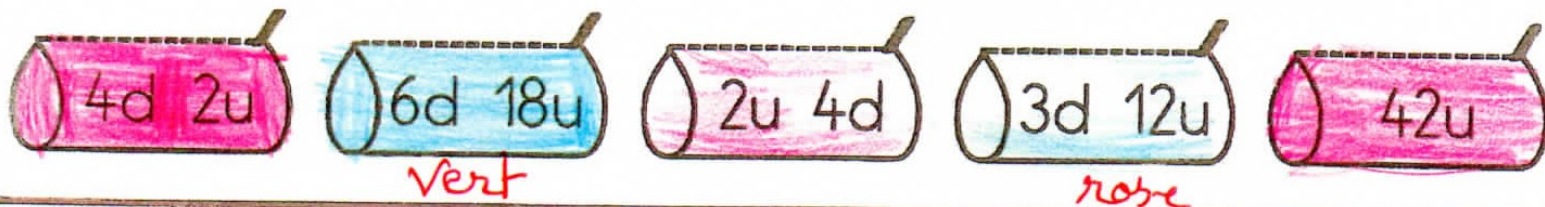
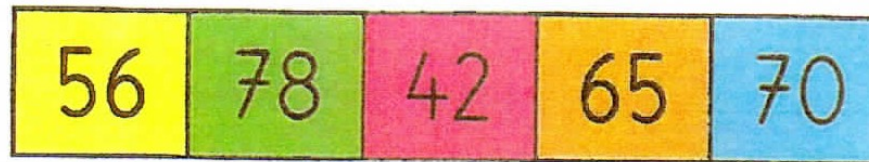
Quel est ce nombre ?

$$6 \times 10^1 + 18 \times 10^0$$

Quel est ce nombre ?

$$6 \times 10^1 + 18 \times 10^0$$

Colorie selon le code.



«J'ai pas compris !»... « J'y comprends rien !»... « de toute façon j'y arriverai pas »...

C'est peut-être là que la pédagogie commence : l'enseignant a tout expliqué, il a introduit la leçon, exposé le problème, donné ses consignes, autrement dit ses instructions ; il ne reste aux élèves qu'à prendre le relais, à endosser leur part de travail, à résoudre le problème, à faire l'exercice, effectuer l'opération . Bref, à répondre à sa sollicitation. Et pourtant, la dévolution n'opère pas ! Ce n'est pas que l'élève ne veuille pas : apparemment, il aimerait bien, mais il n'y arrive pas.

Le BO du 14 février 2002

Au cycle III, ce domaine recouvre l'ensemble des problèmes dans lesquels les nombres et le calcul interviennent comme outils pour traiter une situation, c'est-à-dire pour organiser, prévoir, choisir, décider : le raisonnement y occupe une place importante / confronter les élèves à de véritables situations de recherche / Plus nous avançons dans le cycle III plus nous pensons indispensable de proposer aux élèves des **situations de recherche qui constituent pour eux un défi intellectuel** De plus, ces situations contribuent à **développer chez les élèves une représentation des mathématiques comme un domaine où l'on cherche.**

BO du 19 juin 2008

Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas ;

- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat ;
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques.

BO du 26 mars 2015

“Construire des premiers savoirs et savoir-faire avec rigueur à l'école maternelle

Dénombrer

Les activités de dénombrement doivent éviter le comptage-numérotage et faire apparaître, lors de l'énumération de la collection, que chacun des noms de nombres désigne la quantité qui vient d'être formée (l'enfant doit comprendre que montrer trois doigts, ce n'est pas la même chose que montrer le troisième doigt de la main). «

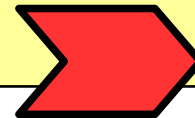
BO du 5 avril 2018

Un enseignement structuré et explicite de la résolution de problèmes

Constats : l'une des difficultés rencontrées par les étudiants ou stagiaires etc. est de sortir du constat des difficultés... de développer une analyse réflexive sur ce que produit l'élève dans une situation singulière...

Identifier des difficultés mais cela ne suffit pas. Il faut aussi se poser la question des obstacles, d'émettre des hypothèses et de se poser la question d'une pédagogie adaptée en mathématique, d'une médiation singulière, prenant en compte la problématique du sujet apprenant, de la matière etc.

Quelques exemples : relevé de données sur
des difficultés d'élèves...



Premières observations sur la problématique des
apprentissage... mathématiques

Vous avez dit situation d'apprentissage....

Quelques questions pour caractériser ce dernier type de situation de travail :

(cf. J.Briand)

- Y a-t-il bien un problème posé aux élèves ou ont-ils seulement à appliquer une consigne ?
- L'élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une réflexion pour accéder à une (la) solution ?
- Comment voit-il qu'il a réussi ou échoué ? (est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions interprétables par l'élève?)
- L'organisation de la situation permet-elle :
 - À chaque apprenant d'être confronté au problème et de faire des tentatives ?
 - L'échange et la confrontation des points de vue ?

.../...

Exemples de situation... à suivre

Apprentissage, élèves et difficultés.

- De qui parlons-nous ? De quoi parlons-nous?
- Est-ce négatif d'être en difficulté ?

La diversité au
sein de la classe

Natures / Causes
Conséquences

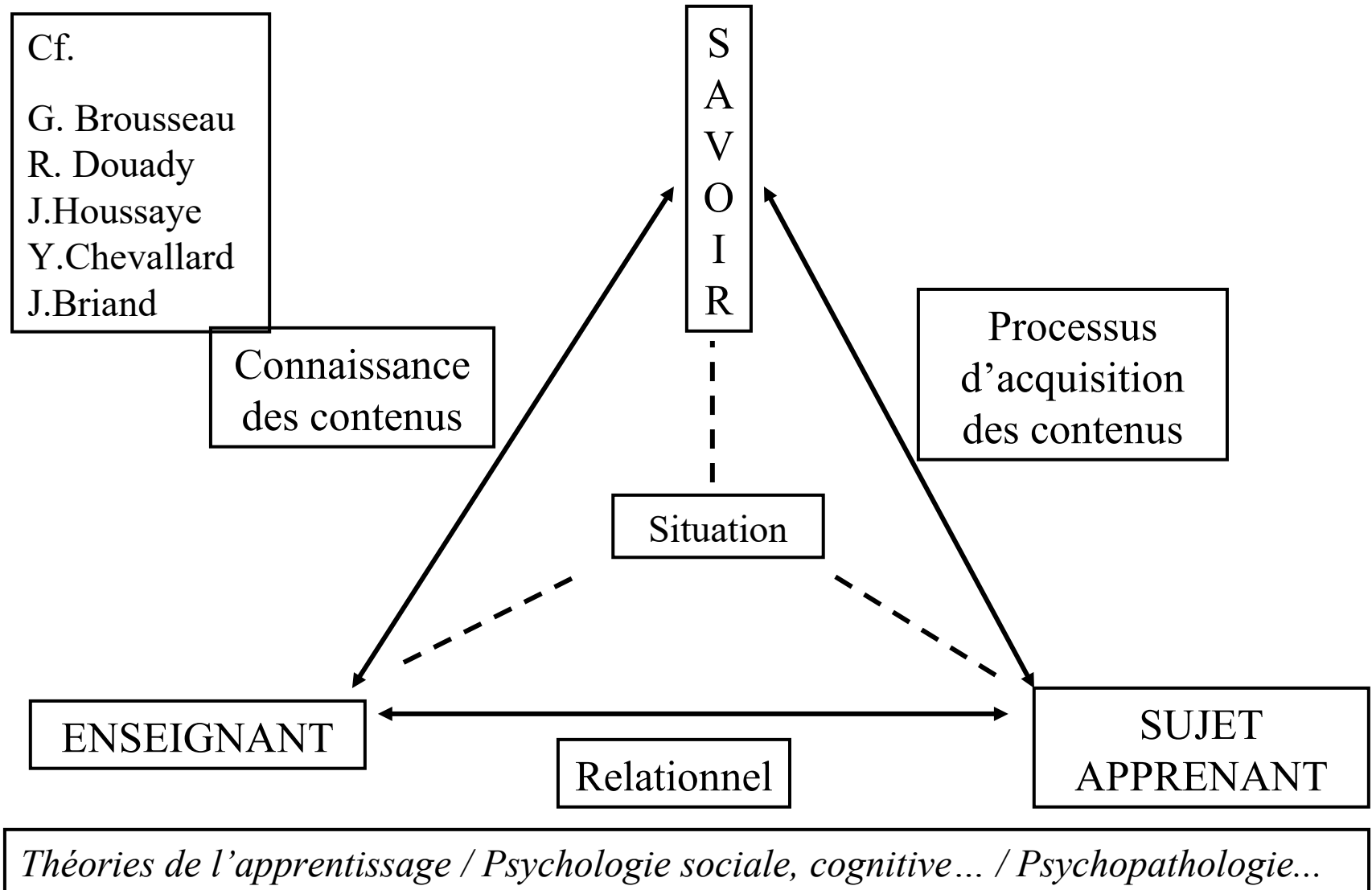
Déstabilisation cognitive dans l'apprentissage... - -

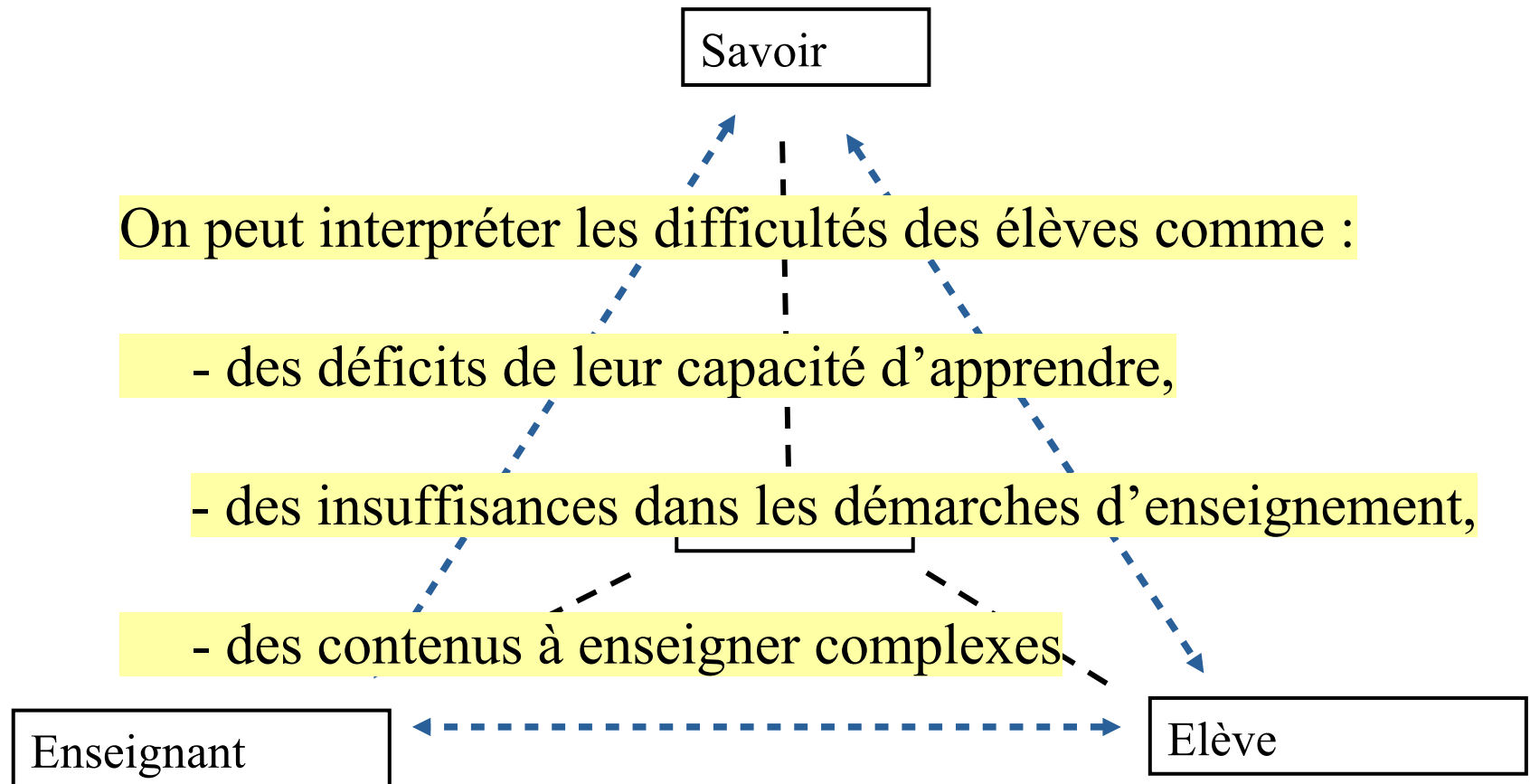
- Qui est concerné par la difficulté ? D'un double point de vue... l'élève qui ne comprend pas et... l'enseignant qui ne comprend pas qu'il ne comprenne pas et qui ne comprend pas ce qu'il ne comprend pas...

Le problème didactique. - -

Aider, ou espérer aider un élève en difficulté, c'est avant tout comprendre comment cet être singulier et unique apprend !

Aider c'est accepter de prendre le chemin de l'incompréhension.





Obstacles rencontrés

Difficultés > obstacles...

Didactique > pédagogique ...

- Du côté du langage
- Du côté de la matière...
- Du côté des élèves ...conatif... cognitif...
- Du côté du contexte ...
- .../...

D'abord , créer un milieu propice à l'apprentissage des mathématiques!

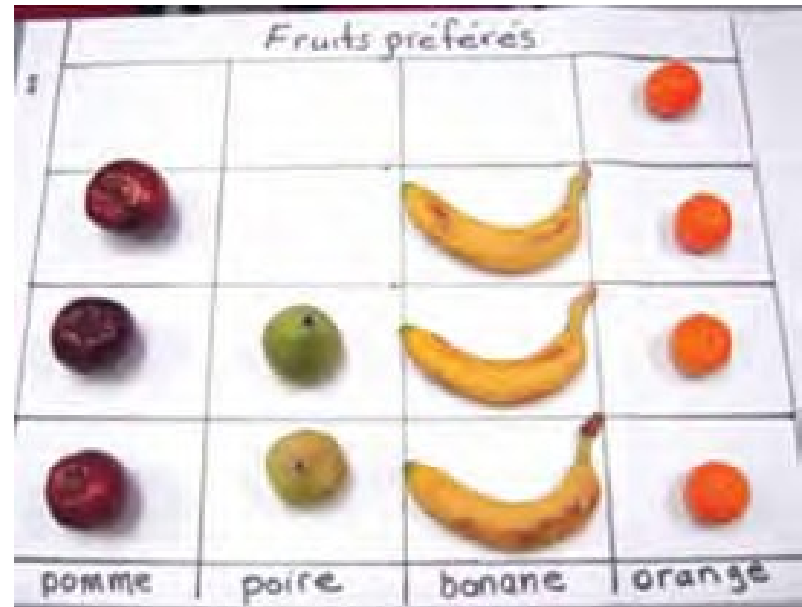
Qu'est-ce à dire?

Un milieu propice à l'apprentissage des mathématiques

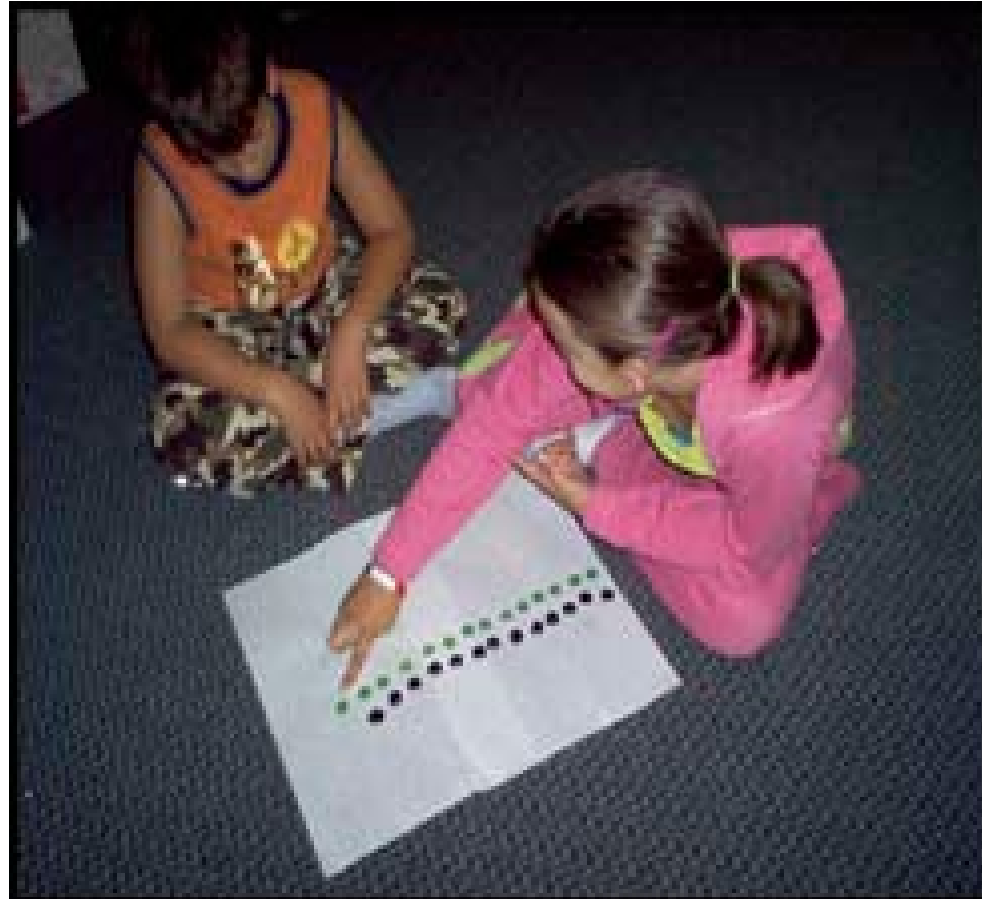
Un ensemble équilibré d'expériences d'apprentissage partagé, dirigé et autonome, qui sont offertes dans un milieu réconfortant et stimulant

- Créer une communauté d'apprenantes et d'apprenants
- Valoriser les connaissances antérieures (ZDA → ZPD) et établir des liens
- Montrer et encourager des attitudes positives à l'égard des Mathématiques
- Fournir des ressources
- Établir des liens solides avec les partenaires (parents, paramédicaux, collègues...)

Communauté d'apprenants



Communauté d'apprenants



Pairs ou impairs ?

Un milieu propice à l'apprentissage des mathématiques

Un ensemble équilibré d'expériences d'apprentissage partagé, dirigé et autonome, qui sont offertes dans un milieu réconfortant et stimulant

•Fournir des ressources

Le matériel concret offre aux élèves des expériences tactiles pouvant les aider à créer des modèles, à décrire des concepts et à explorer les mathématiques.

Et au delà, l'approche du semi-concret...

NB : Assimilation, accommodation,....

Matériel pour trier, classer, ranger, blocs logiques, carreaux de couleur, grille de nombres, tapis de nombres, tableau de nombres, horloges, jetons, jetons de couleurs, balance, balance et poids, cuillères à Mesurer, cartes à jouer, contenants gradués, cubes emboîtables (1 cm, 2 cm, 1,8 cm et 2,5cm), cubes non emboîtables, cuillères à mesurer, Dés et cubes numérotés, matériel multibase, réglettes genèse, roue à mesurer, spirale des nombres, cartes à points, abaque, règles, formes géométriques,...

Un milieu propice à l'apprentissage des mathématiques

Un ensemble équilibré d'expériences d'apprentissage partagé, dirigé et autonome, qui sont offertes dans un milieu réconfortant et stimulant

- Mettre l'accent sur les grandes idées en mathématiques

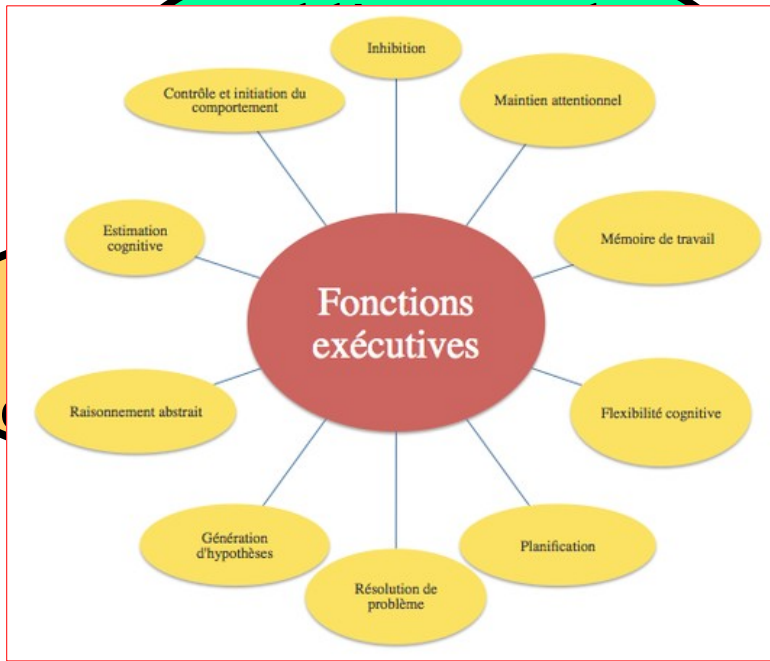
De nombreuses études indiquent que les enfants de divers milieux peuvent apprendre les mathématiques si les concepts sont organisés en grands blocs cohérents et si on leur donne assez d'occasions et de temps pour comprendre chaque domaine en profondeur (...) Les pays qui ont réussi choisissent des concepts essentiels pour chaque année d'études et y consacrent assez de temps pour que les élèves puissent acquérir une compréhension et une maîtrise de base de ces concepts. Ils ne reprennent pas les mêmes concepts pour les réviser l'année suivante; ils passent à de nouveaux concepts.

Un milieu propice à l'apprentissage des mathématiques

Un ensemble équilibré d'expériences d'apprentissage partagé, dirigé et autonome, qui sont offertes dans un milieu réconfortant et stimulant

Établir des liens solides avec les autres partenaires (parents, paramédicaux, collègues, ...)

Quelles aides ou plutôt quel accompagnement des parents?



Psychopédagogie et
résolution de pb.

Problème de contrôle

Premières approches
concernant le champ
de la représentation....

Problèmes
spatiales

Difficultés
numériques et/ou
opératoires

Difficultés de
raisonnement

Problème spatio-
temporel

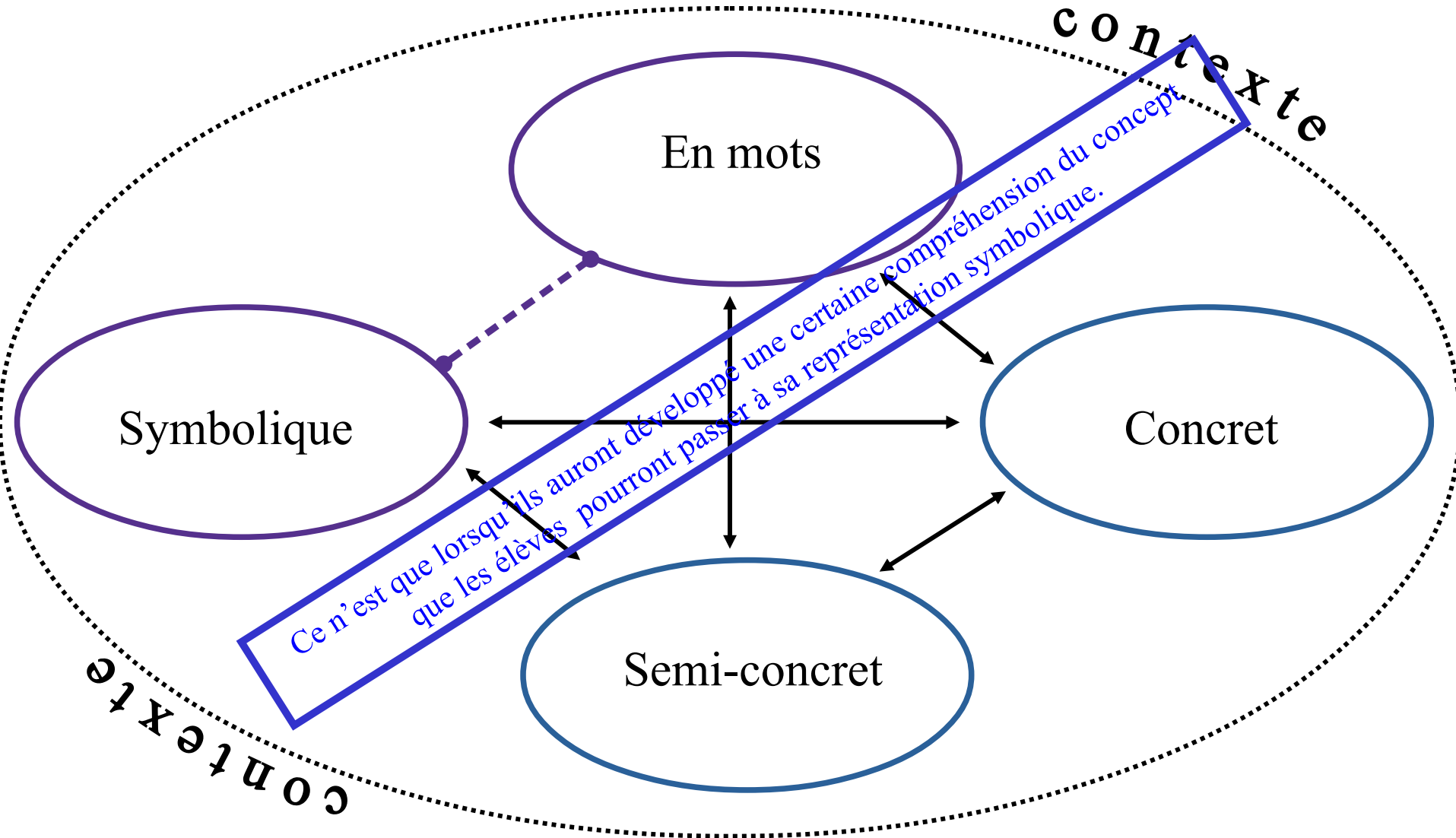
Difficultés d'espace
géométrique

Modes de représentation à travailler....

NB : Les fonctions exécutives regroupent ainsi les composantes suivantes : - l'élaboration de stratégies / la planification des tâches à accomplir (anticipation et réalisation logique) / - le maintien de l'attention et la surveillance de l'avancement des tâches jusqu'à la réalisation du plan etc

Mais...

Modes de représentation



Modes de représentation

En mots

contexte

Utilisation de la double articulation NM / NS avec toutes ses difficultés.

Les niveaux d'élaboration

La dénomination se doit d'être cohérente

12,25 → « douze virgule vingt cinq » ou « douze et vingt-cinq centième »

cohérence

Modes de représentation

contexte

Concret



Modes de représentation

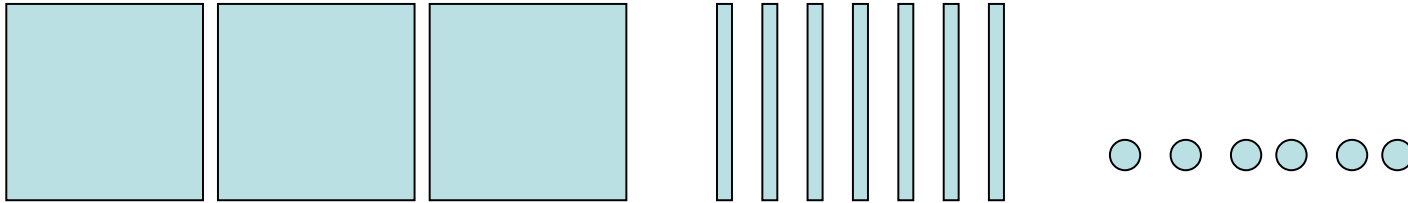
contexte

Concret



La représentation est ____ unité(s) de mille,
____ centaine(s), ____ dizaine(s) et ____ unité(s).

Modes de représentation

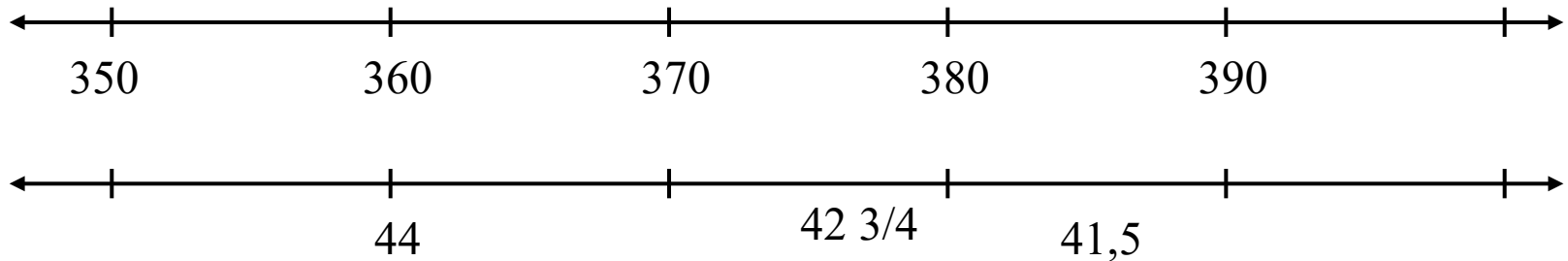


Son illustration peut aussi être en lien avec le matériel de manipulation.

Semi-concret

contexte

Modes de représentation

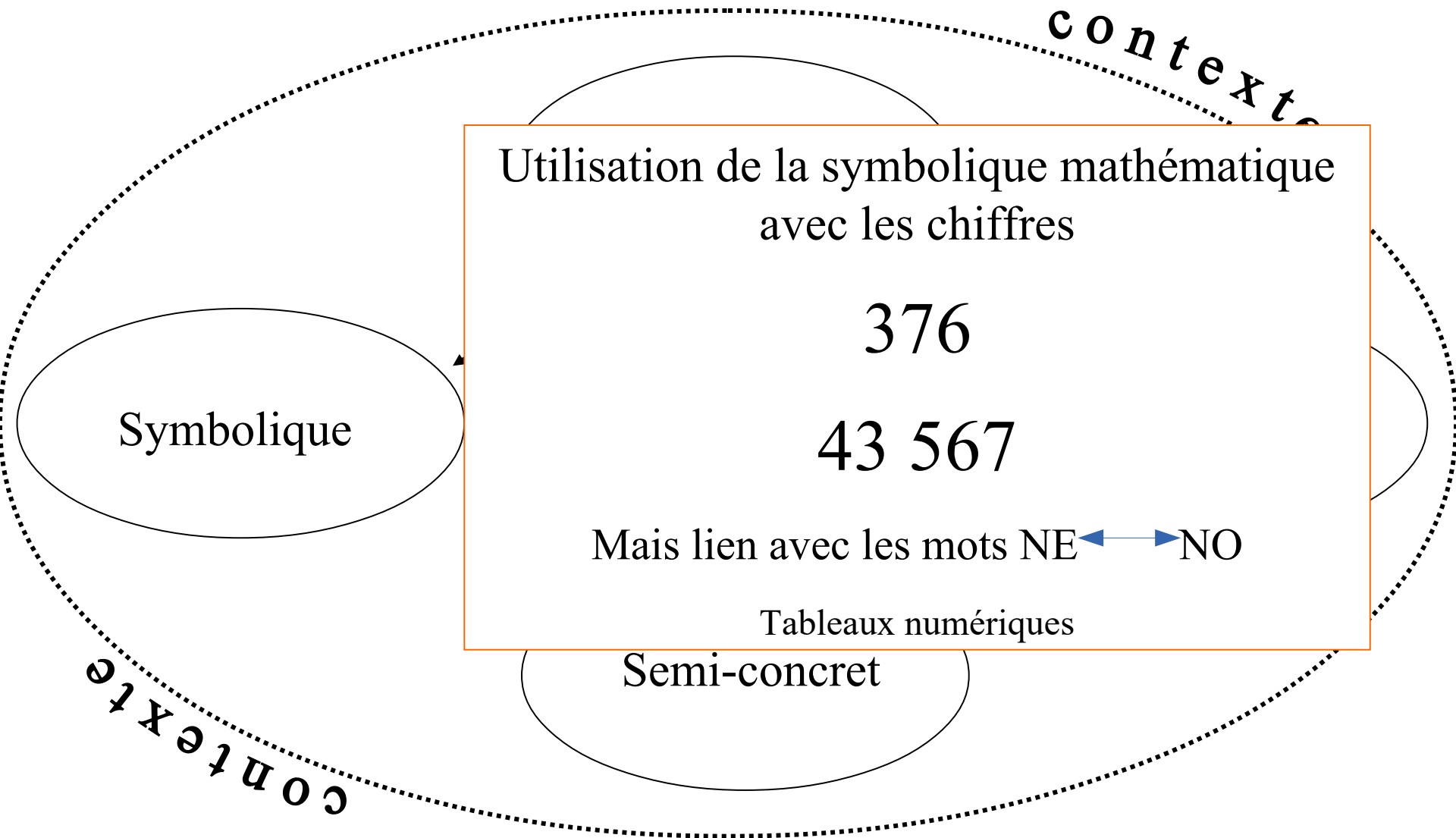


Son illustration peut aussi se faire par l'utilisation de la droite numérique mais...

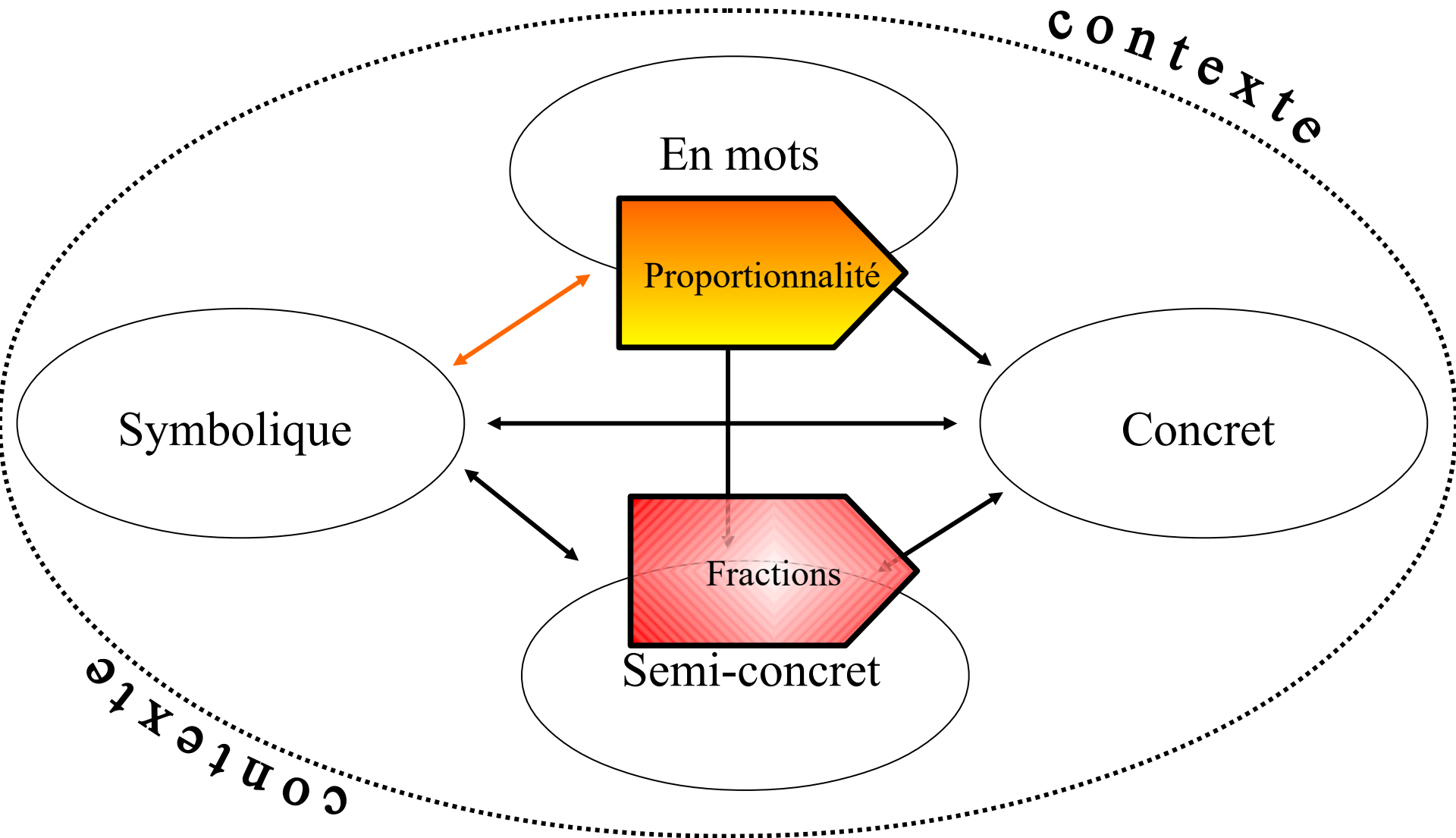
Semi-concret

Contexte

Modes de représentation



Modes de représentation



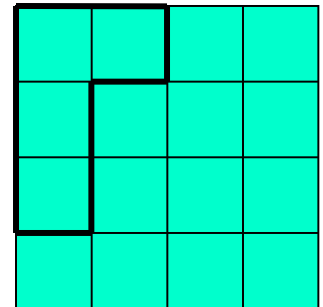
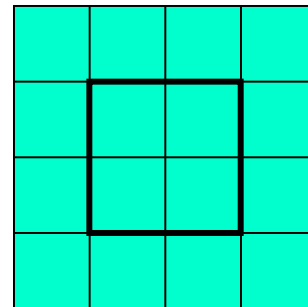
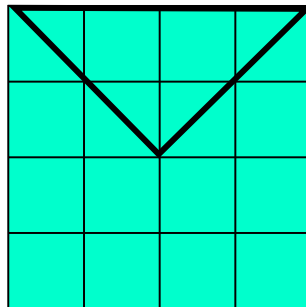
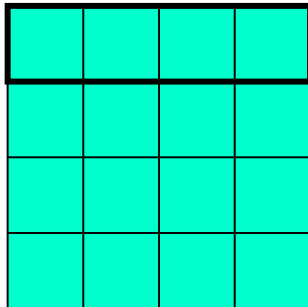
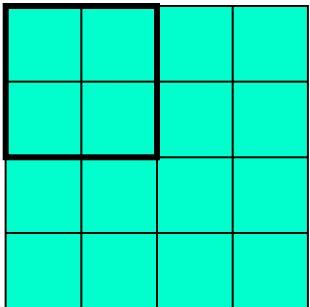
Obstacles rencontrés

- Du côté du concept de fraction ainsi que de la difficulté à saisir l'équivalence de deux fractions :

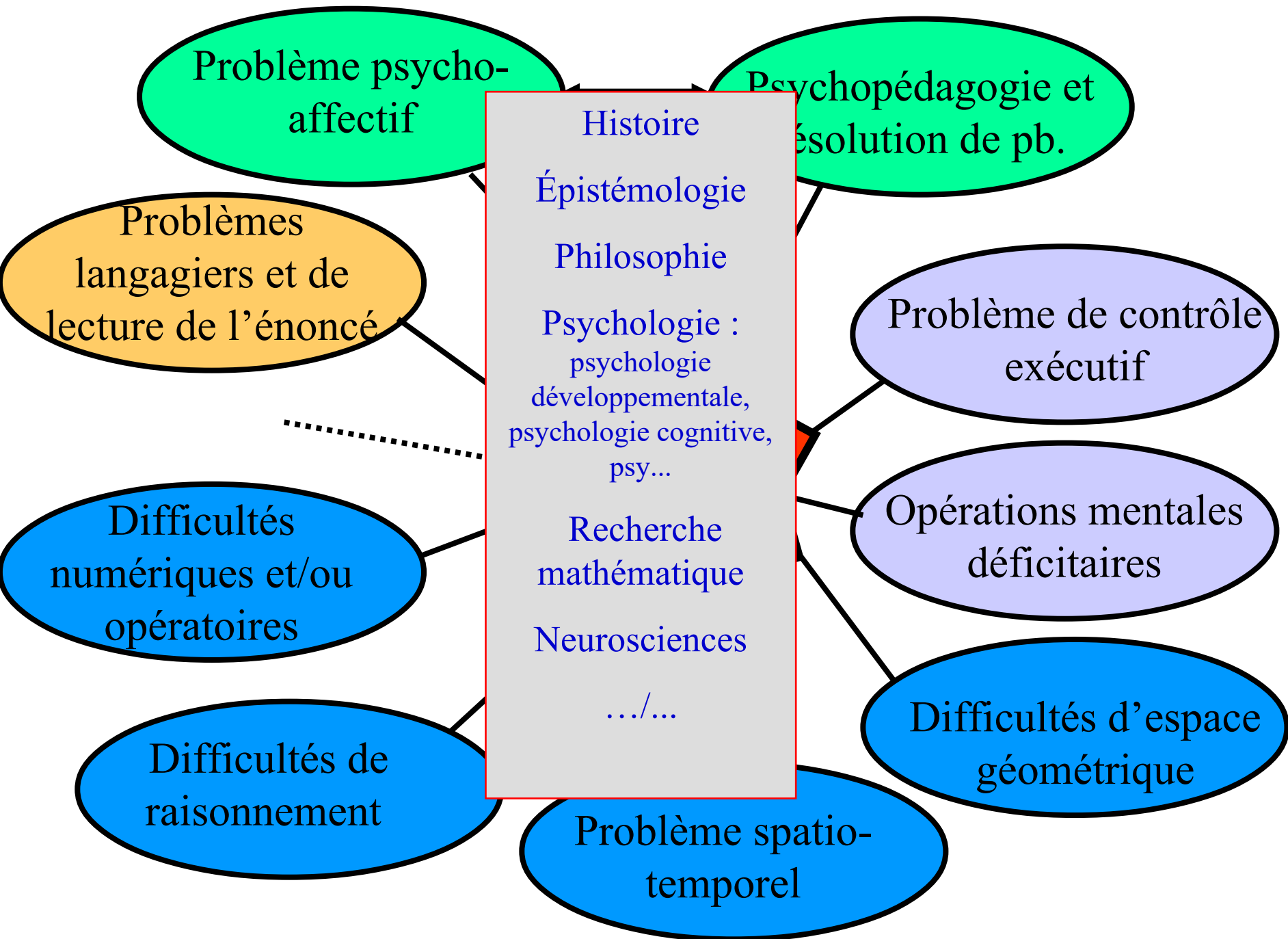
Concept de fraction

Précisons que lorsqu'il est question de parties équivalentes, il ne s'agit pas nécessairement de formes identiques, bien que celles-ci soient plus faciles à utiliser. Les représentations de un quart ($1/4$) dans l'exemple ci-dessous sont basées sur l'aire du tout.

Malgré leurs formes différentes, chacun de ces quarts représente une partie équivalente d'un même tout.



Vecteurs de la difficulté dans le domaine des mathématiques au cours de la scolarité des élèves sachant que l'activité centrale en mathématique c'est la résolution de problèmes.



Des problèmes langagiers...

Des mots et des maths

Dans *Alice au pays des merveilles*, Lewis Carroll fait dire au taon :

Le taon : « *Est-ce que les insectes répondent à leur nom ?* »

Alice : « *Pas à ma connaissance* »

Taon : « *A quoi ça leur sert, alors, d'avoir des noms si ce n'est pas pour y répondre ?* »

Alice : « *A eux ça ne sert à rien mais j'imagine que cela a une utilité pour les gens qui les nomment. Autrement pourquoi les choses auraient-elles des noms ?* »

Parmi les mots qui apparaissent en mathématique, certains sont considérés comme faisant partie du langage courant, d'autres sont ressentis comme mathématiques.

Langage
naturel

Langage
naturel

Langage
naturel

Langage
naturel

que

ngage
ématique

Langage
mathématique

Le mot-nombre, un mot particulier



Vache



Arbre



Mouton

Le mot désigne l'objet, l'animal....

Le mot-nombre, un mot particulier



Trois

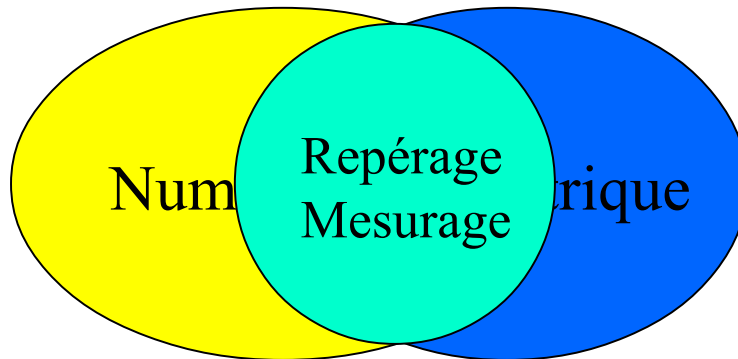
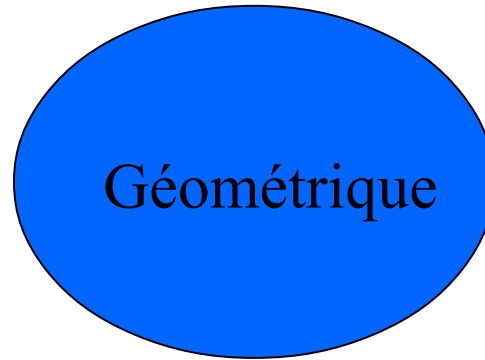
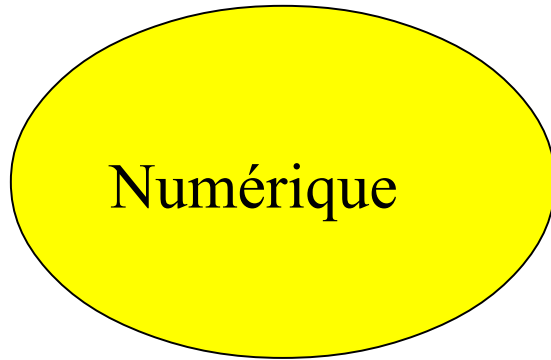
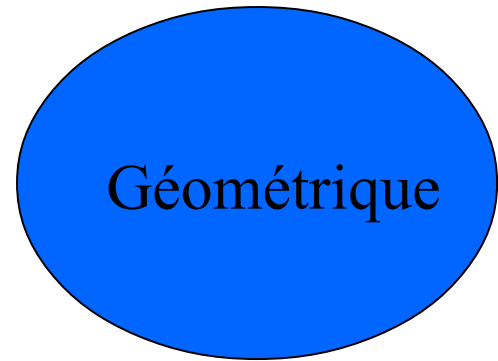
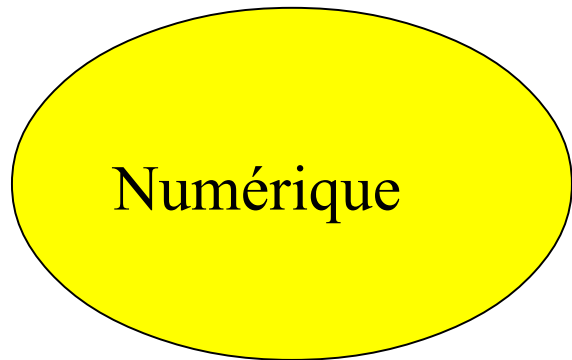
Quatre

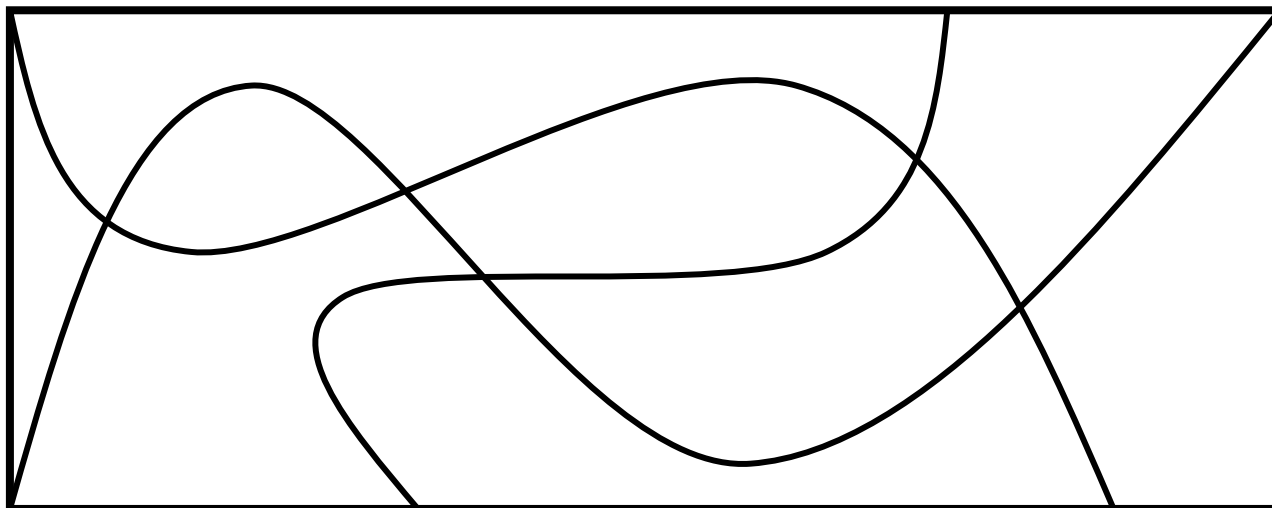
Le mot-nombre désigne l'ensemble (numérique) de

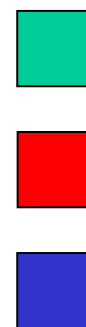
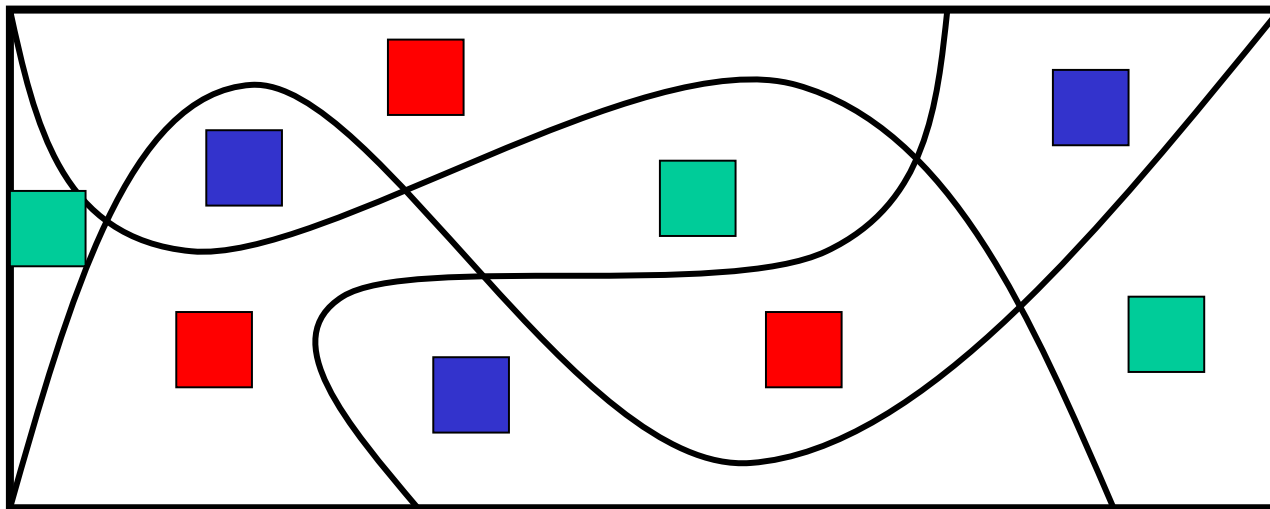
Sept

Identifier le domaine travaillé...

...ainsi que les exigences

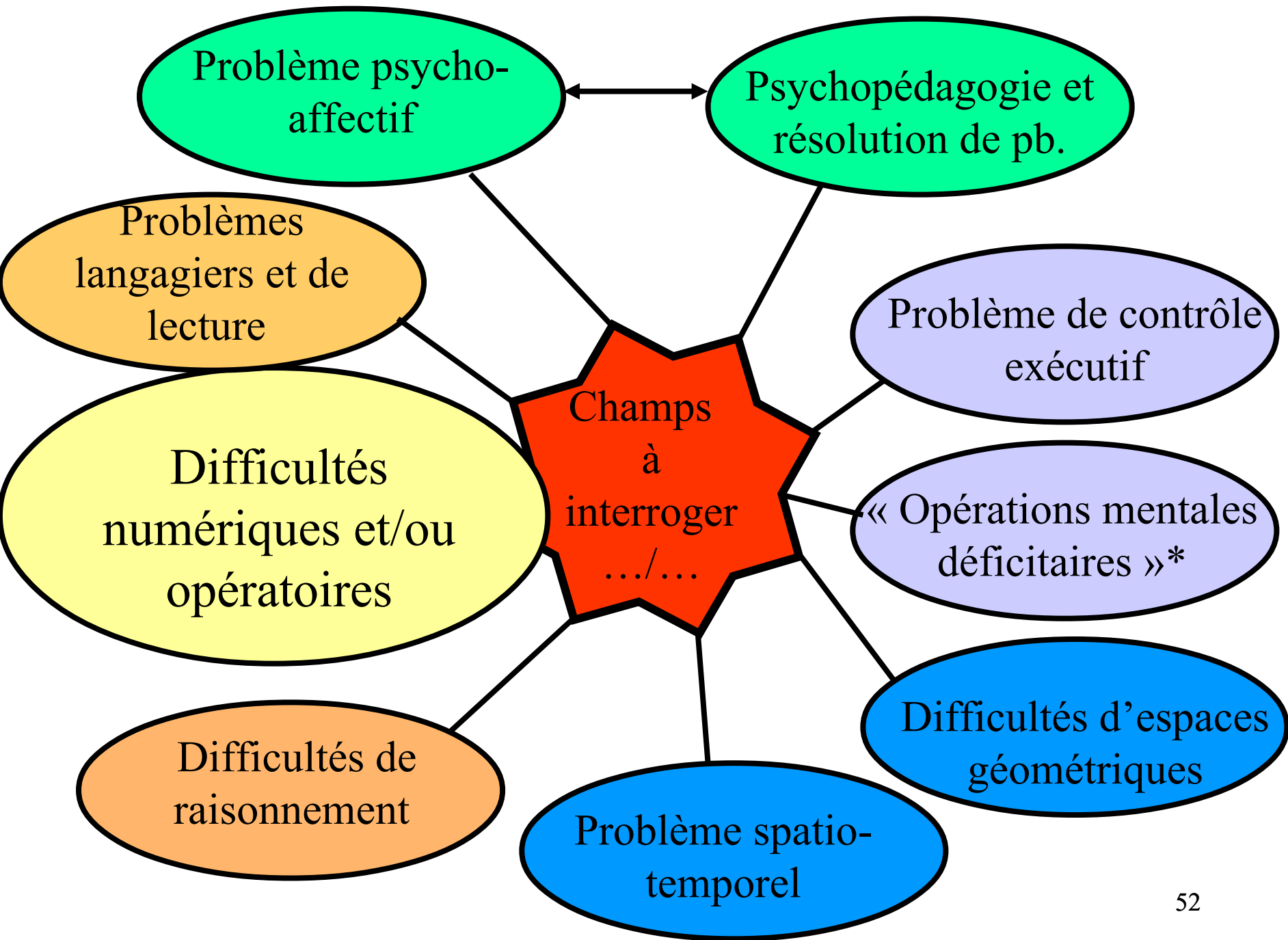






Lundi 1^{er} mars

« Date à 4 carreaux de la marge... »



Qu'est-ce qu'un nombre ?

Plusieurs approches peuvent être envisagées pour tenter de répondre à cette question ; trois me semblent essentielles.

- Il est possible d'interroger les mathématiques elles-mêmes.
- Il est possible de se demander ce que la psychologie, tant des profondeurs que cognitive peut nous apprendre en ce qui concerne cette question.
- Il est enfin possible de questionner l'histoire comparée des différentes réponses développées par les diverses civilisations au cours des siècles, des millénaires.



G. Ifrah parle de : “L’intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul.”

Éléments d'histoire sur la numération (2)

- **Un important apport : les bases.**

L'homme a une capacité instinctive à grouper les objets afin de les classer, les distinguer. C'est également ce qu'il a fait pour développer ses systèmes de numération...

- **Parce qu'il sut compter, l'homme apprit à écrire**

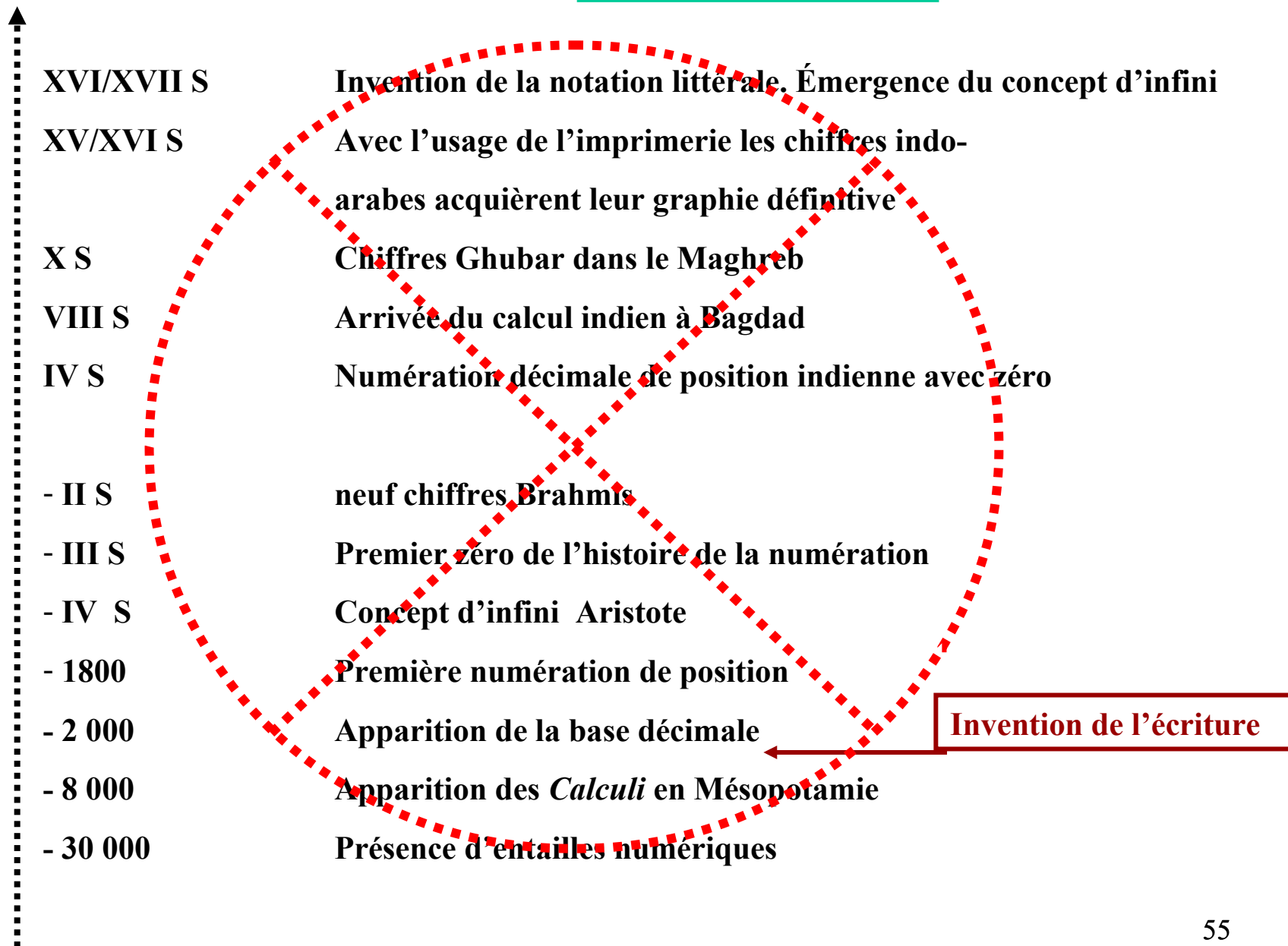
- **Vers la numération de position:**

- **La découverte du Zéro:**



- **L'Inde, berceau de notre numération moderne.**

Chronologie...



« Tout sujet apprenant le nombre doit se poser naturellement les mêmes questions que ses inventeurs pour le comprendre. »

L'apport du constructivisme

On admet que la plupart des connaissances (savoirs et savoirs-faire) ne sont ni reçues du milieu par un organisme passif, ni-pré-programmées à la naissance de telle façon que le sujet se les approprierait nécessairement...

Ces connaissances sont construites par le sujet dans le cours de son activité.

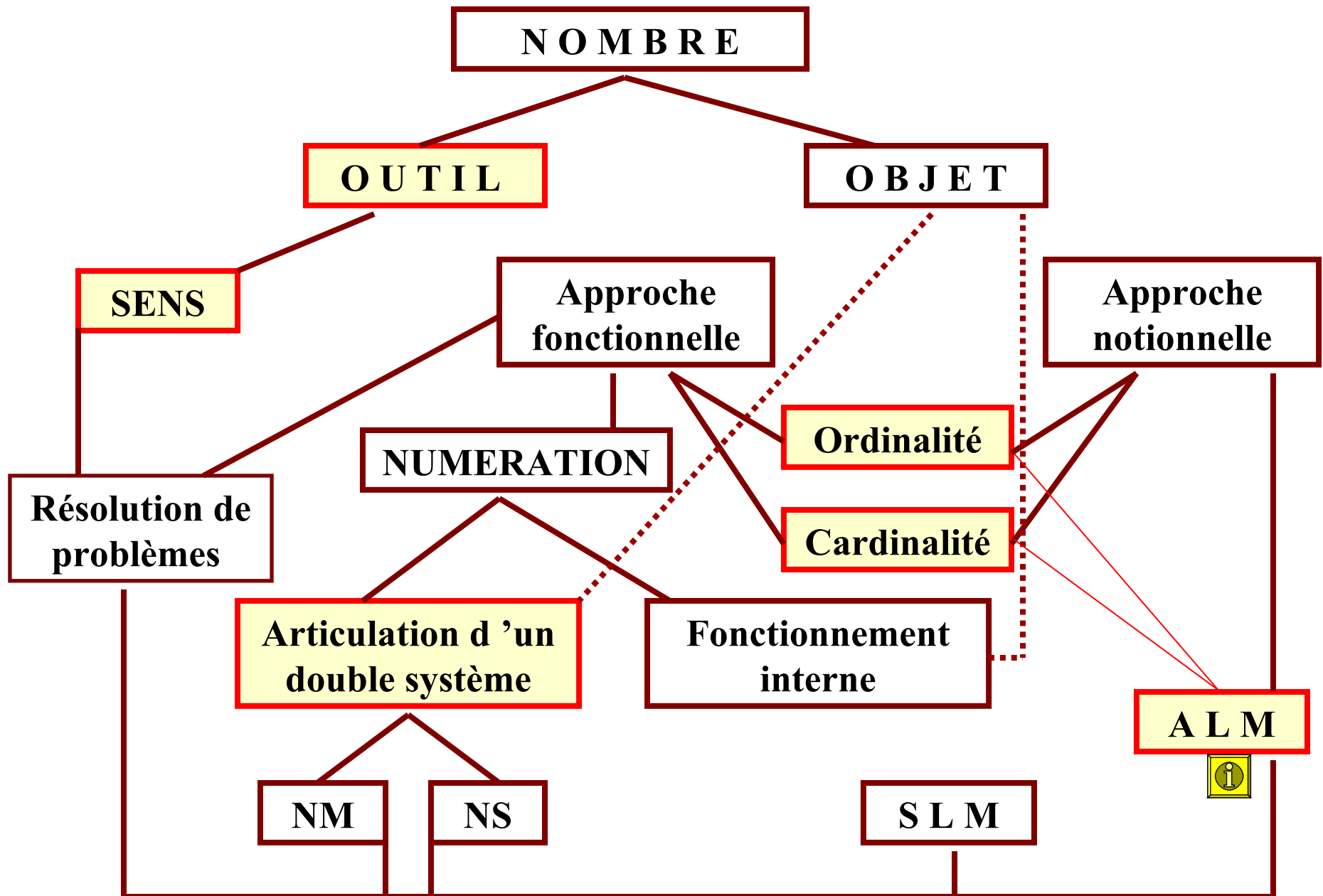
La place du calcul dans la construction du nombre

Deux thèses modernes concernant le calcul :

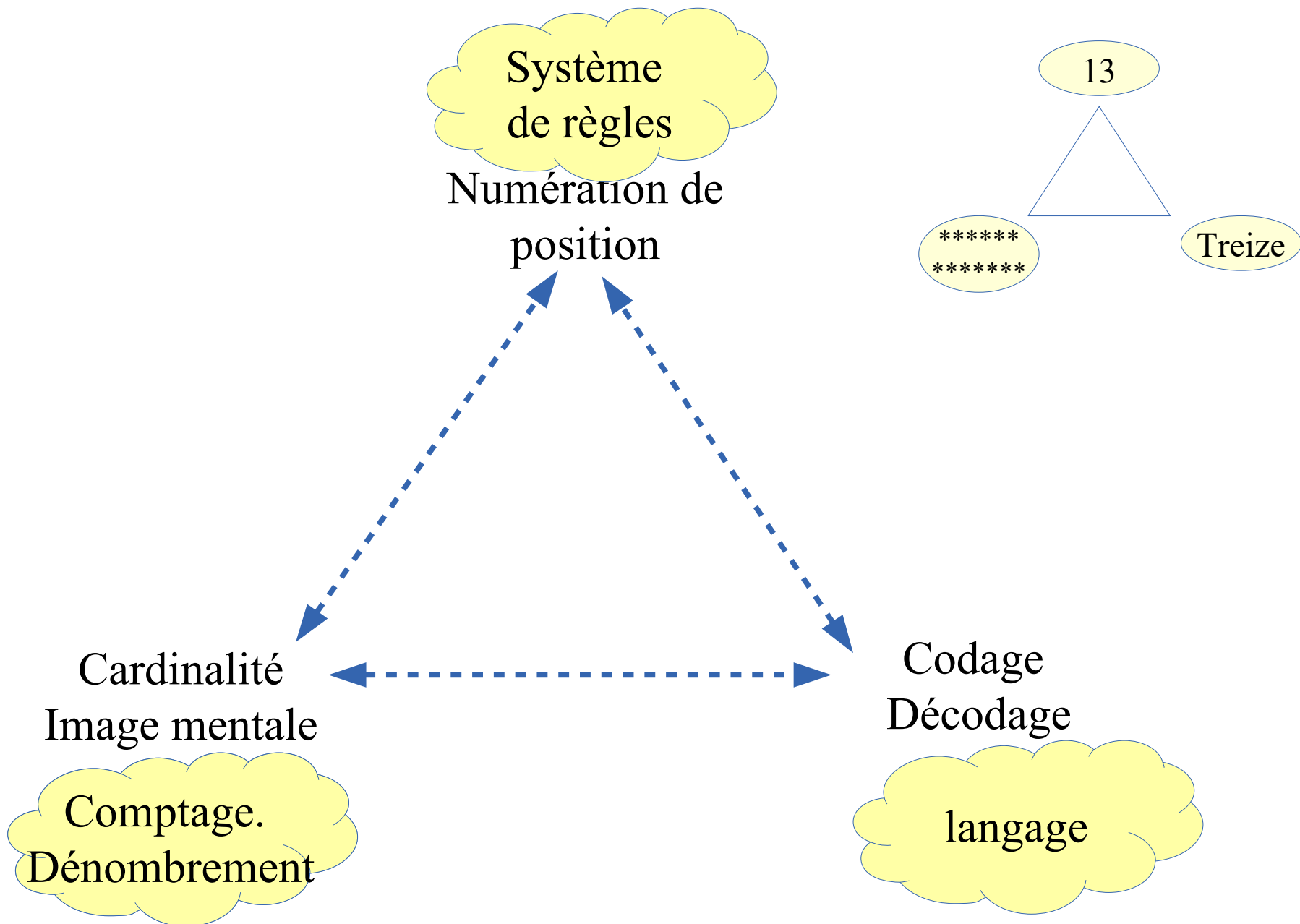
1. le calcul comme accélérateur d'apprentissage du comptage, donc la nécessité de développer des compétences dès le plus jeune âge. (R. Brissiaud et...)

2. le comptage doit précéder les activités de calcul (en référence aux cinq principes). [Gelman](#) et bien d'autres... :

* attention, le calcul dont il est question n'est pas l'algorithme de l'addition par sur-comptage, mais plutôt la perception d'une quantité par la somme de ses parties (voir les constellations, les livres à **compter...les cartes à points de JL Brégeon**)



Obstacles du côté de la matière



Approche Institutionnelle	Numération Orale	Numération Ecrite
M. Fayol	Numération Lexicale	Numération Syntaxique
S. Baruk	Langue Numérale	Langue Numérique
Centre National spécialisé	Numération Mots	Numération Ecrite

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles		
Algorithme		
Base		
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base		
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		



Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systematique et fondamental
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systematique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systematique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systematique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systematique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	

	10 ju	20 niyu	30 sanju
1 ichi	11 juichi	21 niyuichi	31 sanjuichi
2 ni	12 juni	22 nijuni	32 sanjuni
3 san	13 jusan	23 nijusan	33 sanjusan
4 shi	14 jushi	24 nijushi	34 sanjushi
5 go	15 jugo	25 nijugo	35 sanjugo
6 roku	16 juroku	26 nijuroku	36 sanjuroku
7 sichi	17 jusichi	27 nijusichi	
8 hachi	18 juhachi		
9 ku			

Obstacles du côté du sujet / la
matière : construction des
connaissances et aspects
développementaux du sujet apprenant

Si la perspective piagétienne comporte des éléments fort intéressants quant à la construction du nombre, des recherches plus récentes apportent des éclairages là où la théorie piagétienne est lacunaire et ce particulièrement sur la période précédant la maîtrise opératoire du nombre. En particulier un certain nombre de travaux :

Gelman et Gallister, Meck ... à partir de 1978

Wagner et Walter 1982 Ginsburg 1982

K. Fuson et al. 1982 / 1988 / 1991

Baroody 1987 1991 Steffe 1991 .../...

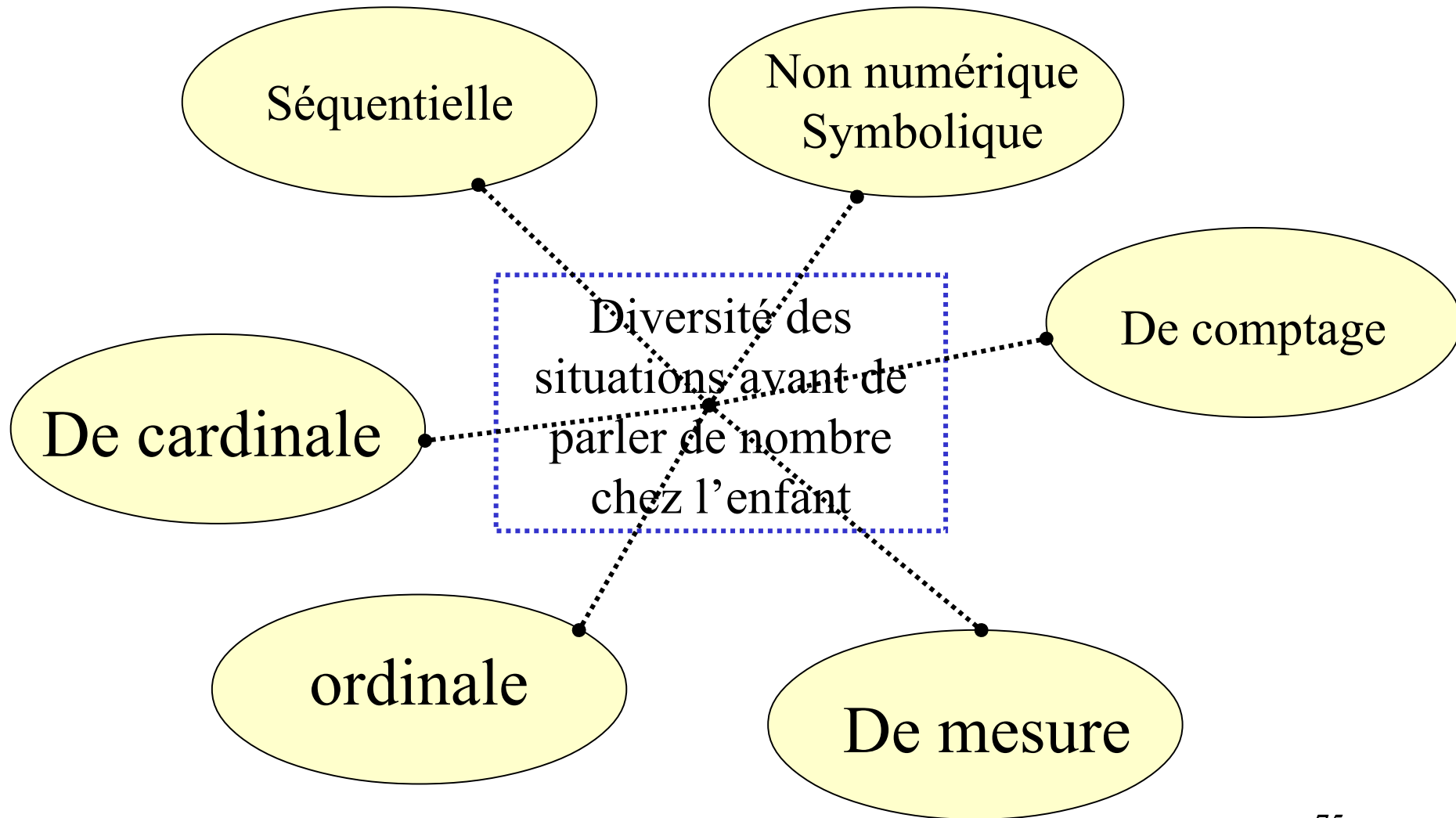
J. Bideaud / H. Lehalle 2000...

Les savoirs spontanés des enfants

- *Existence précoce des mots pour compter*
- *C'est par l'aspect verbal de la numération que l'enfant aborde notre système numérique*
- *C'est d'abord un savoir par cœur, inutilisable dans un immédiat temporel*
- *Le chemin sera long avant de parvenir à une première maîtrise de la numération. Elle s'étalera sur environ 4 années, répartie approximativement de 2 à 6 ans.*
- *Ce savoir à l'état brut va devoir être travaillé, policé.*

K.Fuson fait remarquer que bien avant d'arriver à construire le nombre du point de vue logique, l'enfant rencontre les mots-nombres dans une variété de situations entre lesquelles il va progressivement établir des liens._

K.Fuson Ces situations seraient de 6 (7) types :



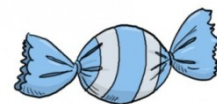
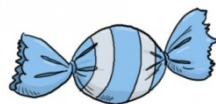
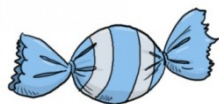
Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale.(1)

K. Fuson & al (1982)

- **La chaîne chapelet (String level)**
- La chaîne insécable(liste non sécable)
- La chaîne sécable
- La chaîne terminale (chaîne dénombrable)

Chaîne chapelet

Undeuxtroisquatrecinq !



Situations de comptage pour la segmentation..

Un enfant seul :

- Compter le plus loin possible.
- Dire un nombre fort, le suivant faible
- Dire un nombre, taire le suivant
- Compter le plus loin possible en frappant sur ses propres énonciations.
- Compter le plus loin possible en frappant entre ses propres énonciations.
- .../...

Compter à deux (enfants entre eux ou enfant/adulte) :

- Compter en alternance
- Frapper sur les dires de l'autre.
- Compter le plus loin possible sur les frappés de l'autre.
- Énoncer deux nombres consécutifs.

Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale.(1)

K. Fuson & al (1982)

- La chaîne chapelet (String level)
- La chaîne insécable(liste non sécable)
- La chaîne sécable
- La chaîne terminale (chaîne dénombrable)

Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

- * Compter jusqu'à n
- * Livrer le successeur d'un nombre
- * Première procédure de quantification par comptage

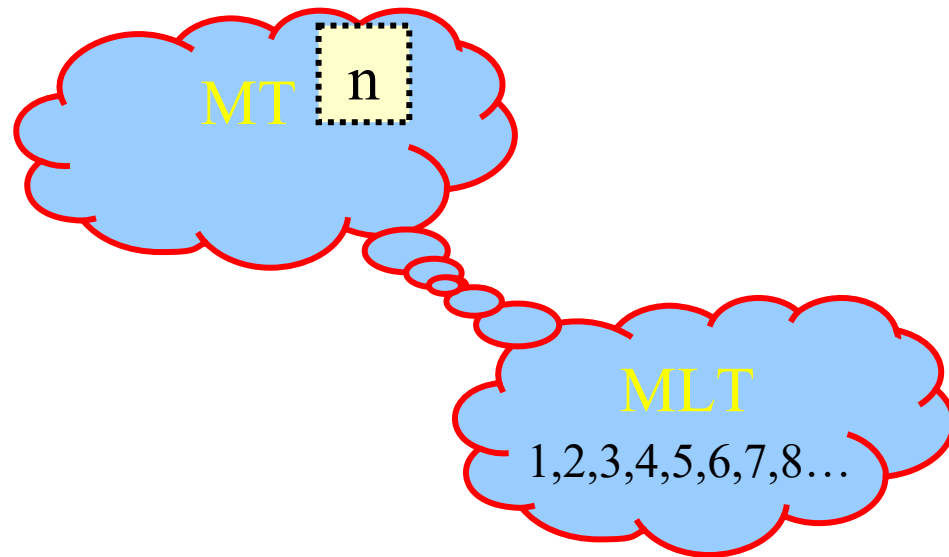
➔ Premiers problèmes math.

Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

* Compter jusqu'à n (n appartenant à ZSE)

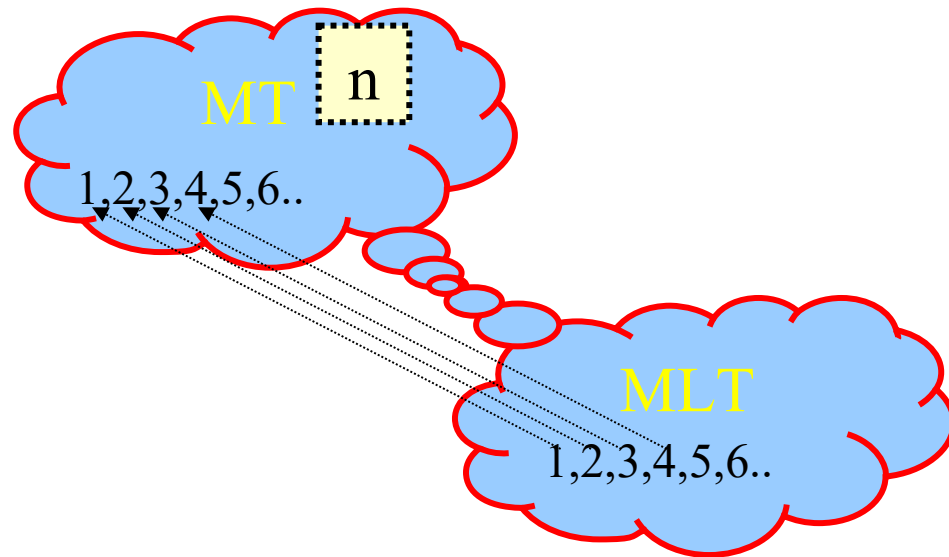


Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

* Compter jusqu'à n

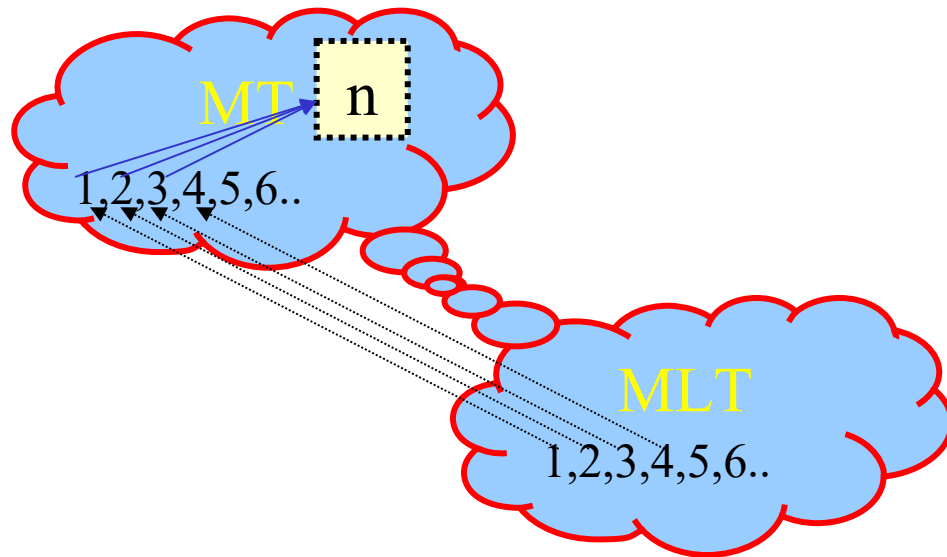


Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

* Compter jusqu'à n



Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale (2)

K. Fuson & al (1982)

- La chaîne chapelet (String level)
- La chaîne insécable(liste non sécable)
- **La chaîne sécable**
- La chaîne terminale (chaîne dénombrable)

Chaîne sécable

Sept, huit, neuf, dix, onze, douze....

Développement de nouvelles habiletés :

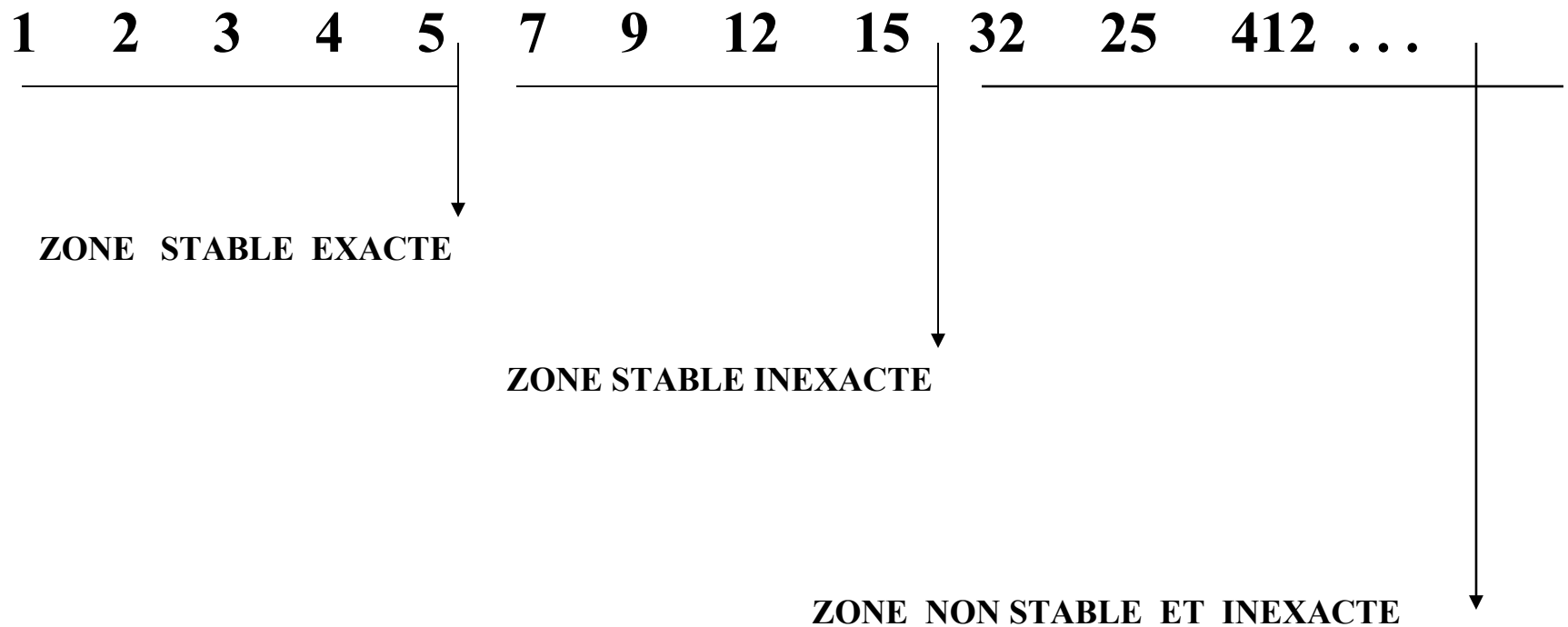
- * Compter à partir de x
- * Compter de x à y
- * Comptage par bonds
- * Compter à rebours
- * Livrer le prédécesseur d'un nombre

Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale (2)

K. Fuson & al (1982)

- La chaîne chapelet (String level)
- La chaîne insécable(liste non sécable)
- La chaîne sécable
- La chaîne terminale (chaîne dénombrable)

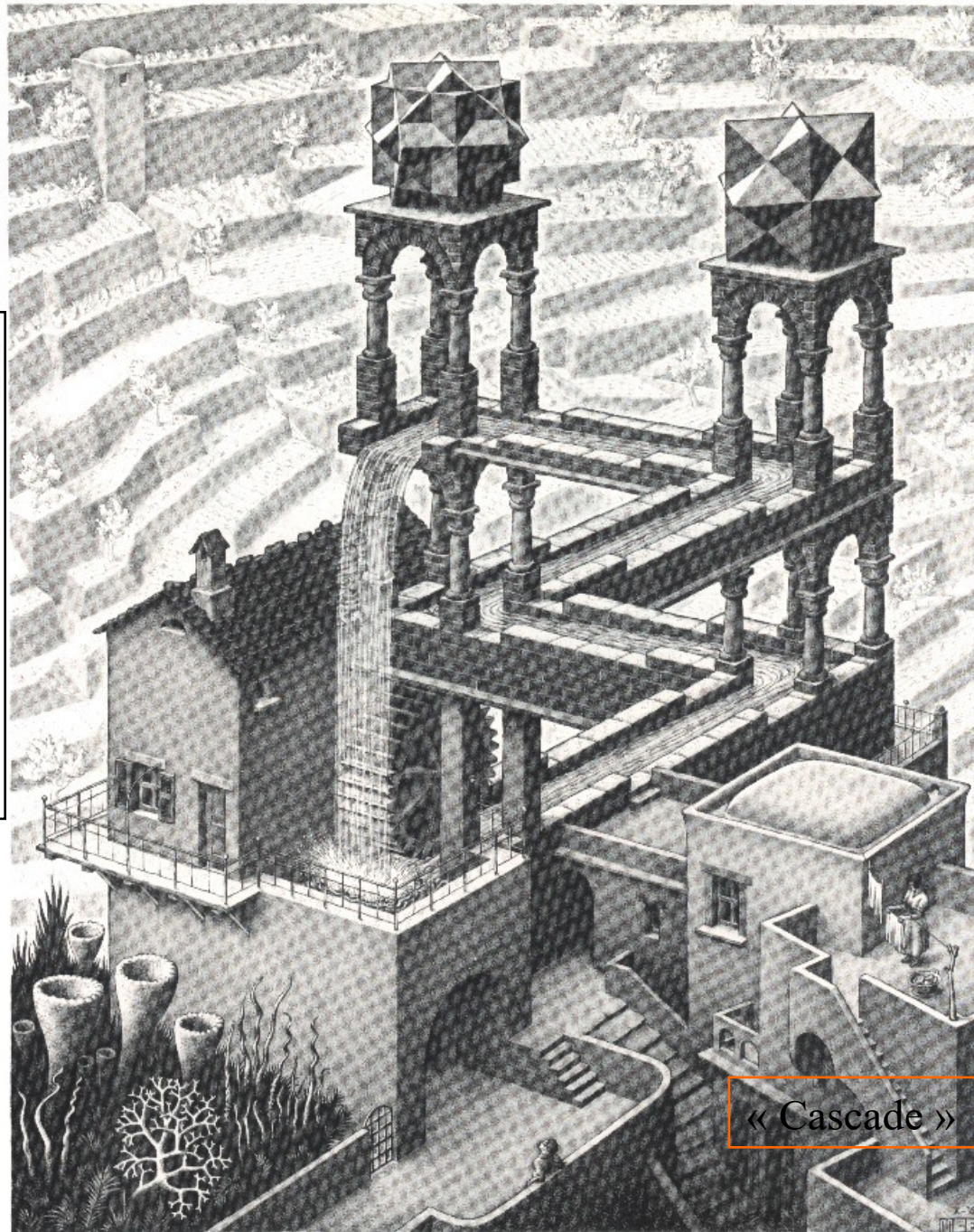
Différentes zones dans la chaîne insécable.



Incidences sur les apprentissages...

BO Mars et Novembre 2015 : « Apprendre en s'exerçant...
Apprendre en se remémorant et en mémorisant »

Le champ du
numérique
et
des passages
obligés parfois
difficiles



« Cascade » MC Escher

Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

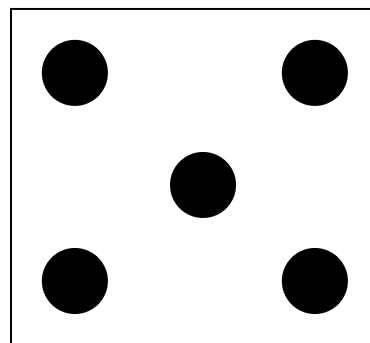
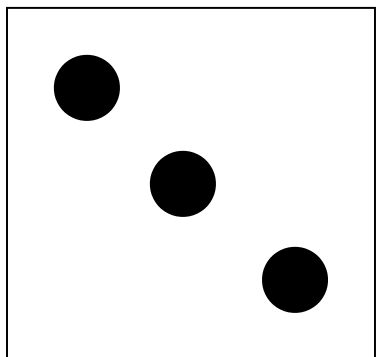
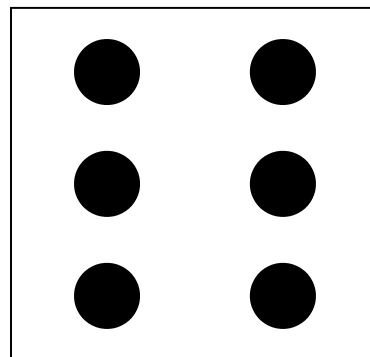
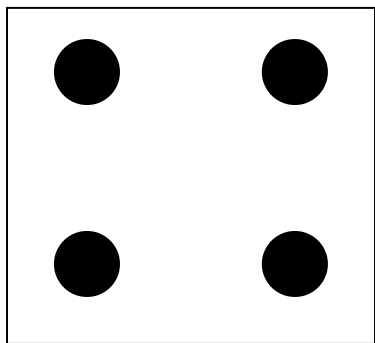
NB : selon le niveau de développement des compétences des élèves, d'autres procédures de quantification vont voir le jour c'est la capacité à agir sur le numérique : addition, soustraction....

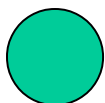
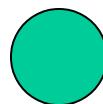
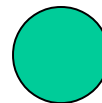
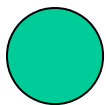
Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

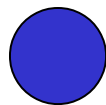
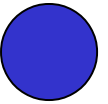
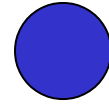
- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
 - Configurations figuratives
 - Configurations non-figuratives





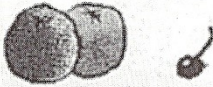
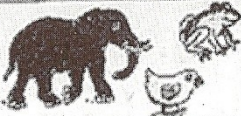


Ali

Est-ce que tu peux dire trois ?			
	Oui ☒	Non ☐	Si oui, Trois <i>couleurs</i>
	Oui ☐	Non ☒	Si oui, Trois
	Oui ☐	Non ☒	Si oui, Trois
	Oui ☒	Non ☐	Si oui, Trois <i>flèches</i>
	Oui ☐	Non ☒	Si oui, Trois
	Oui ☐	Non ☒	Si oui, Trois

Camila

Est-ce que tu peux dire trois ?

	Oui	Non	Si oui, Trois <i>carrières</i>
	Oui	Non	Si oui, Trois <i>fruits</i>
	Oui	Non	Si oui, Trois <i>animaux</i>
	Oui	Non	Si oui, Trois <i>flèches</i>
	Oui	Non	Si oui, Trois <i>tricycles</i>
	Oui	Non	Si oui, Trois <i>.....</i>

Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

Procédure de quantification

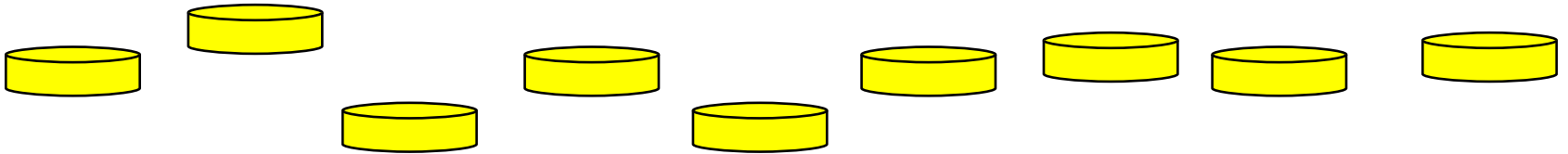


Le comptage-dénombrement est la procédure de base permettant d'évaluer de manière très précise des collections dont la taille importe peu.

Il semble se manifester très tôt chez l'enfant. Pourtant on relève de nombreuses erreurs: on a à faire à des sujets qui à la fois savent et ne savent pas compter.

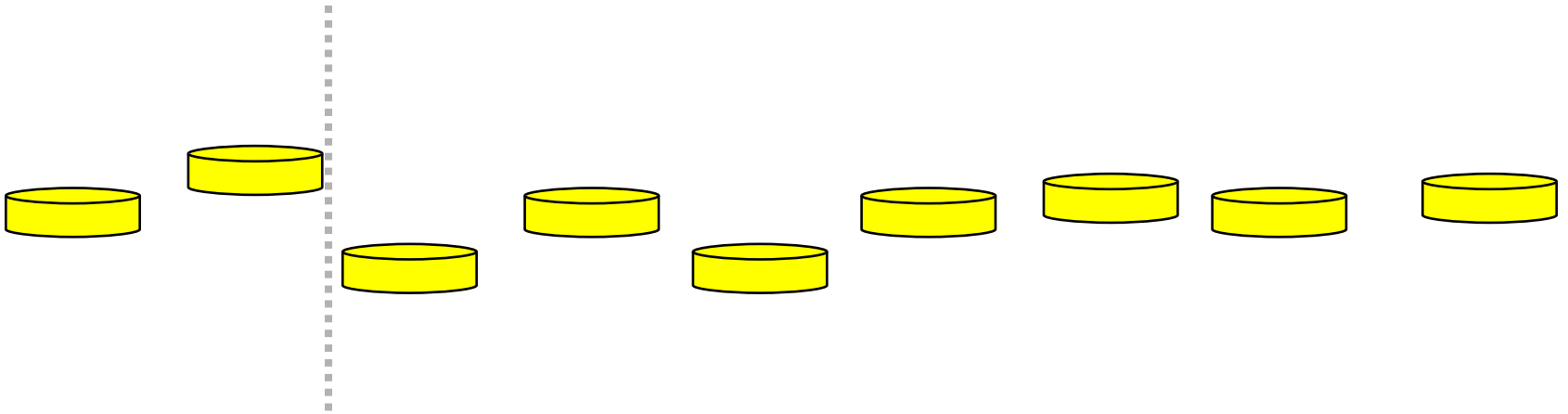
Procédure de quantification

1. Type de difficulté rencontrée



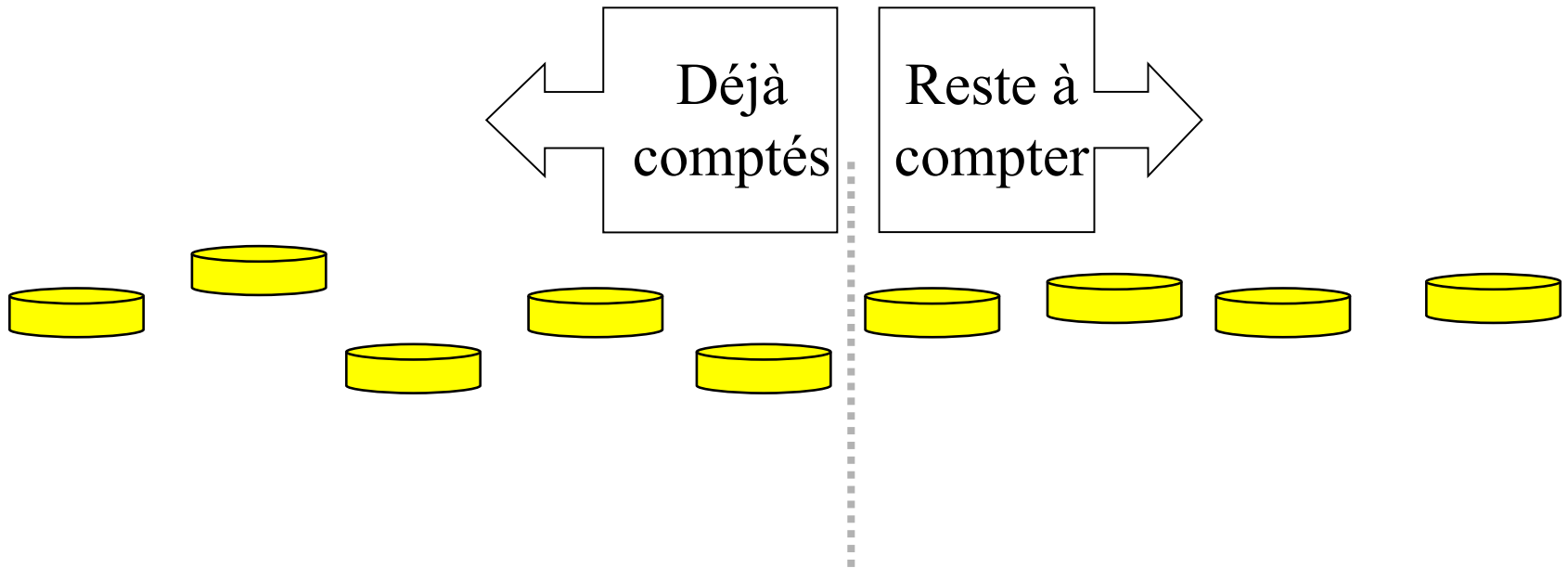
Combien y a t-il de jetons?

Procédure de quantification



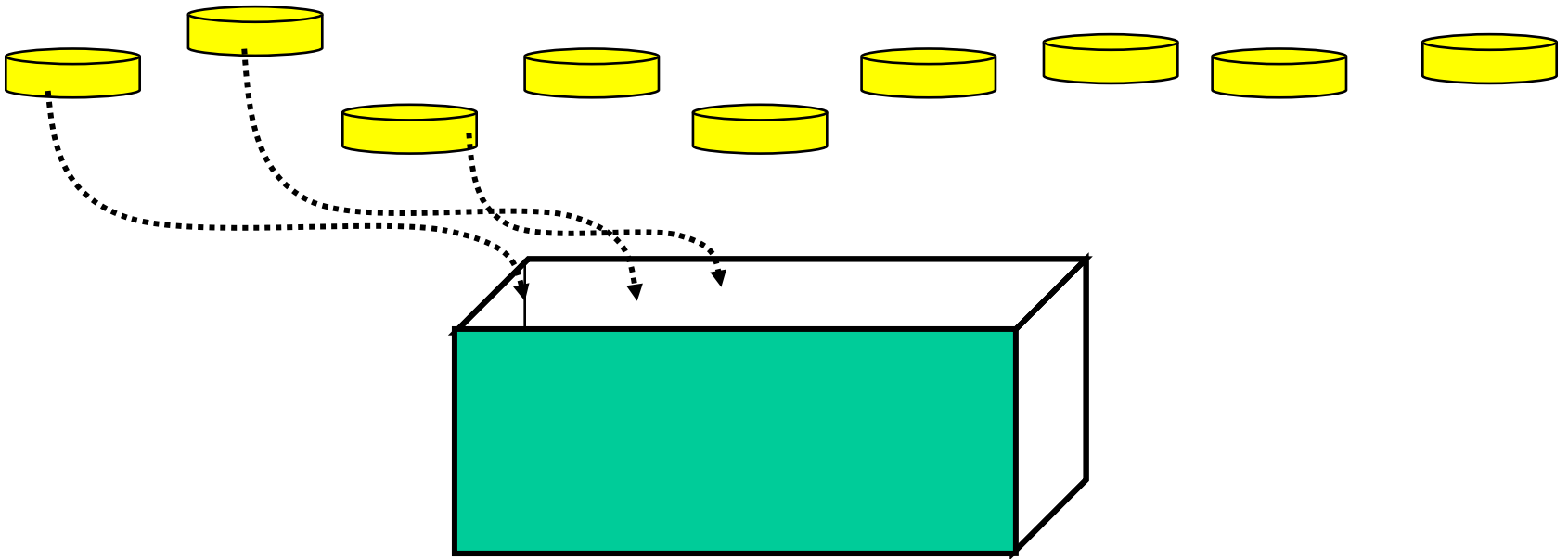
Combien y a t-il de jetons?

Procédure de quantification



Combien y a t-il de jetons?

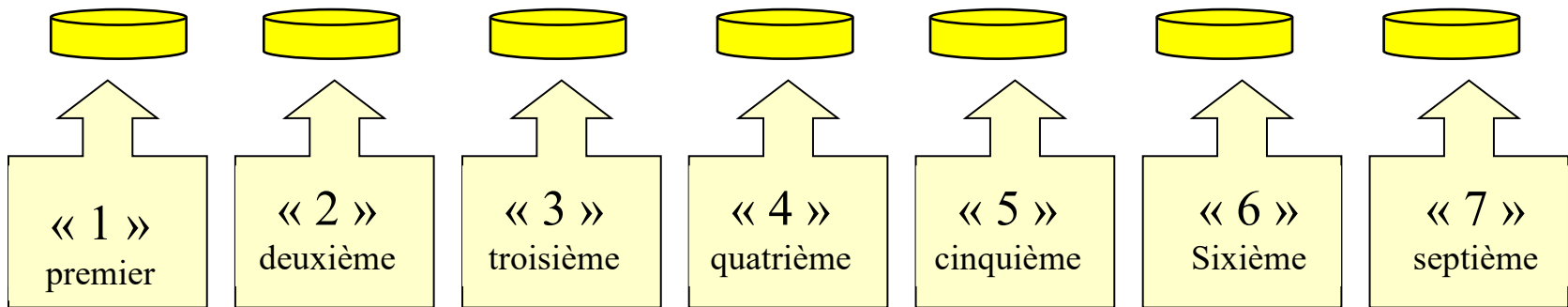
Procédure de quantification



Combien y a t-il de jetons?

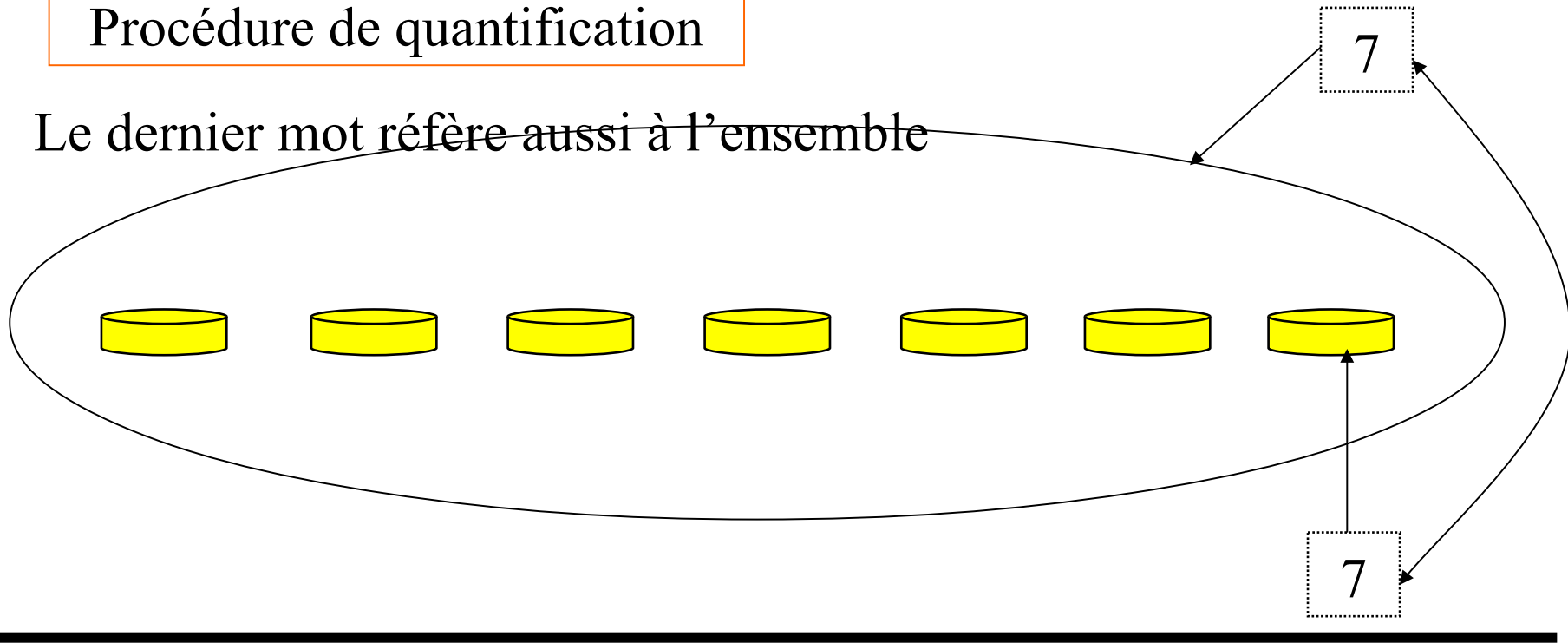
Procédure de quantification

2. Type de difficulté rencontrée



Procédure de quantification

Le dernier mot réfère aussi à l'ensemble



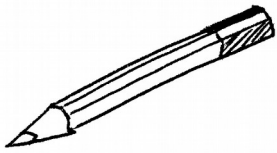
Accepter de conceptualiser contre une
connaissance... donc de « force », par
répétition ou imitation
La question du combien...

= ?



BO Mars et Novembre 2015 : les activités de dénombrement doivent éviter le comptage-numérotage et faire apparaître, lors de l'énumération de la collection, que chacun des noms de nombres désigne la quantité qui vient d'être formée (**l'enfant doit comprendre que montrer trois doigts, ce n'est pas la même chose que montrer le troisième doigt de la main**).

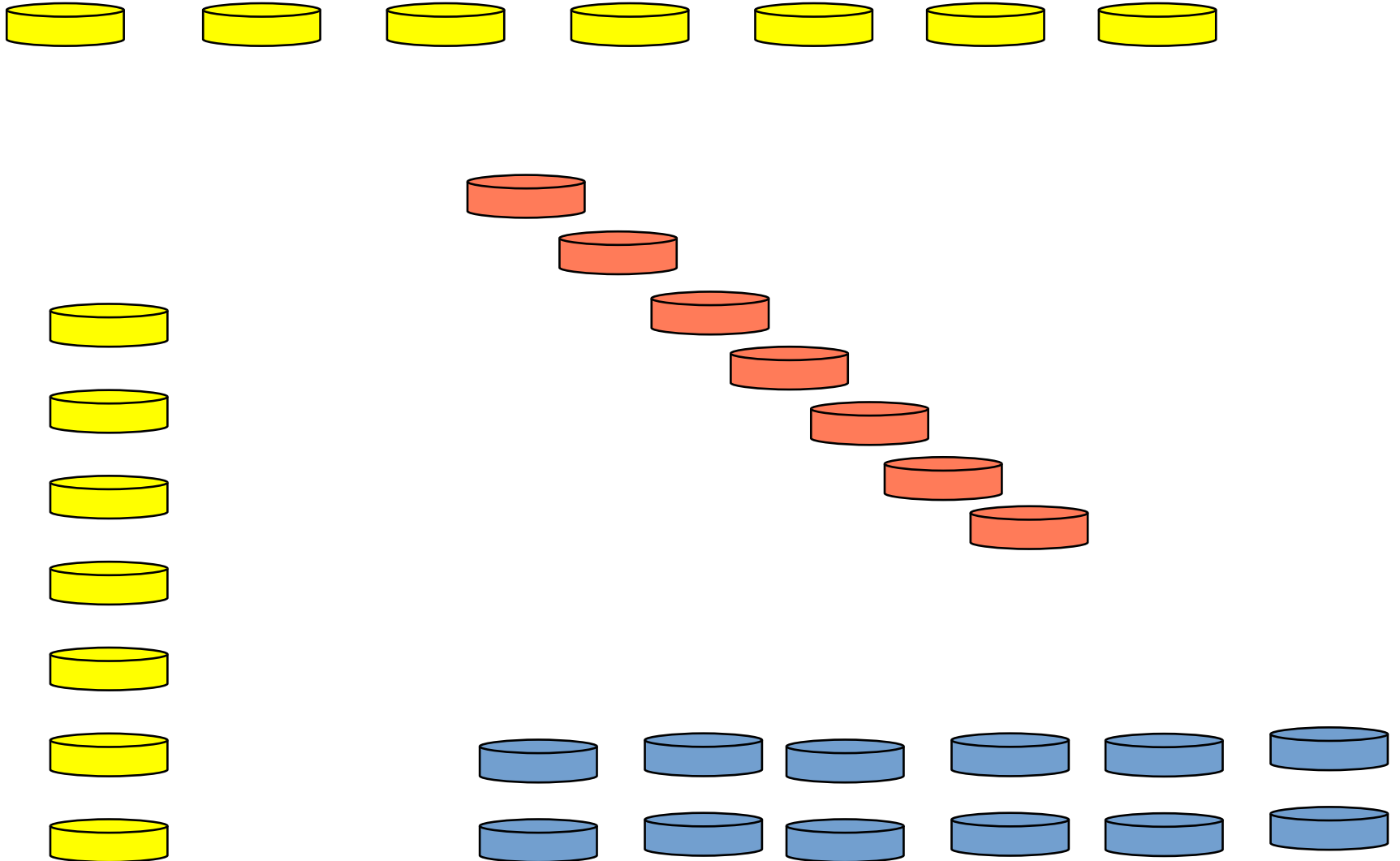
Procédure de quantification



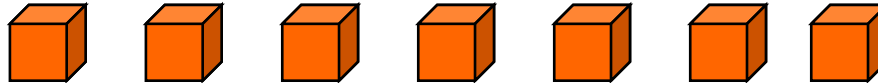
(c) 2008 - <http://coloriage.mobi>



Collections homogènes organisées ...en lignes



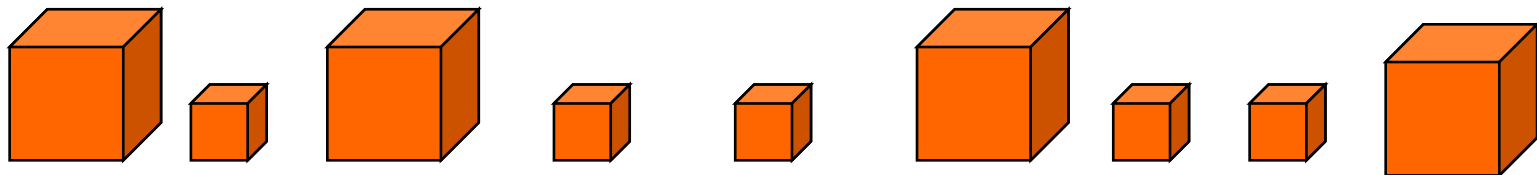
Collections homogènes en lignes, autres objets



Collections hétérogènes en lignes, mêmes formes / couleurs



Collections hétérogènes en lignes, mêmes formes / tailles

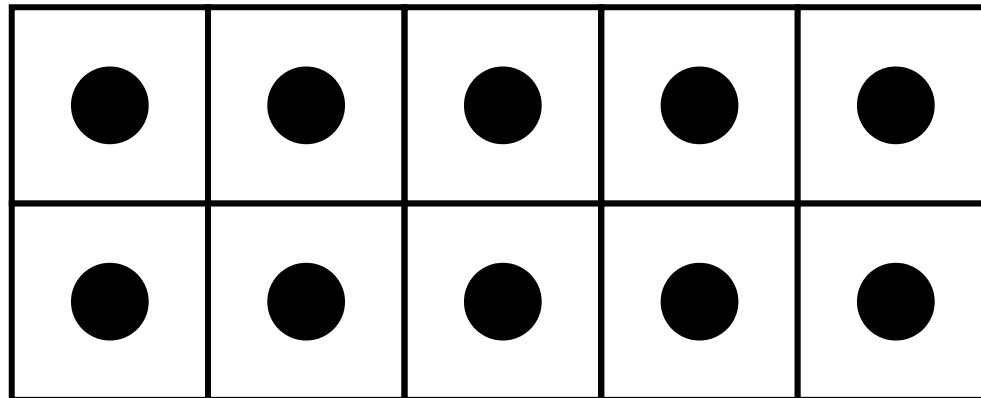


BO Mars 2015

« Pour dénombrer une collection d'objets, l'enfant doit être capable de synchroniser la récitation de la suite des mots nombres avec le pointage des objets à dénombrer. Cette capacité doit être enseignée selon différentes modalités en faisant varier la nature des collections et leur organisation spatiale car les stratégies ne sont pas les mêmes selon que les objets sont déplaçables ou non (mettre dans une boîte, poser sur une autre table), et selon leur disposition (collection organisée dans l'espace ou non, collection organisée-alignée sur une feuille ou pas). »

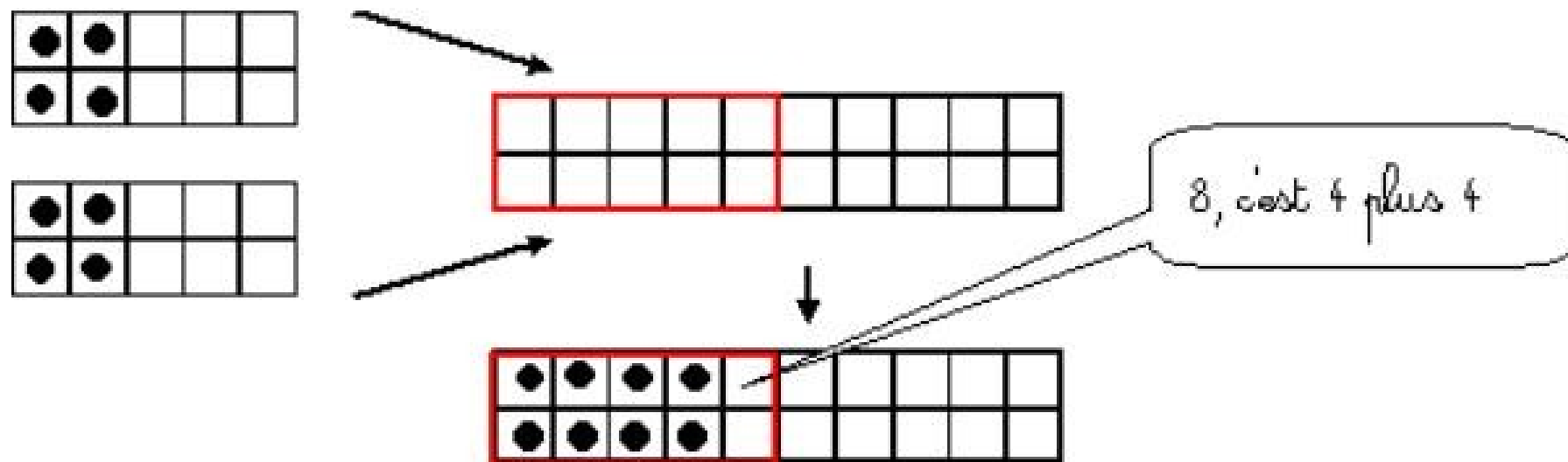
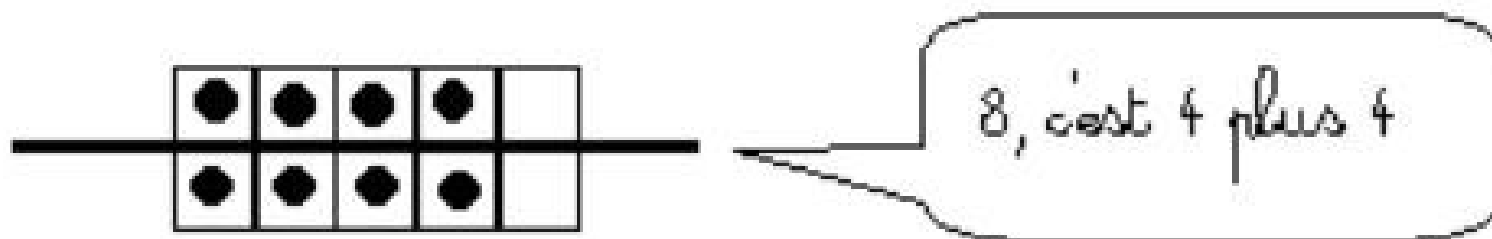
Outil d'aide... La carte à points

Suite au travail sur les constellations de type « configuratives » ainsi qu'à la représentation de quantités par la dimension corporelle (plus particulièrement celle de la main) une pratique pédagogique de référence sur des représentations « modélisées » de collections (Cartes à points) pourraient faciliter l'accès au calcul par la création d'images mentales numériques.

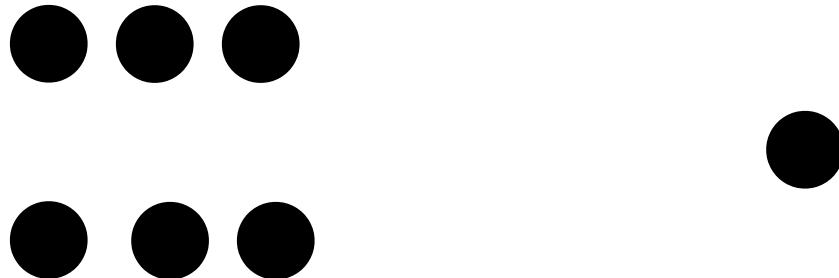


Site de Jean-Luc Brégeon

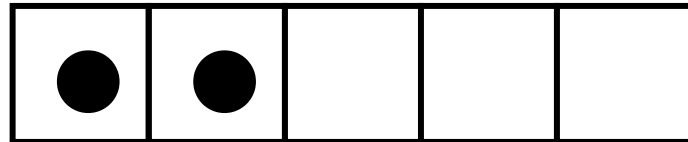
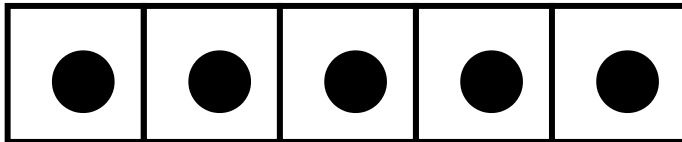
●	●			
●	●			



Intérêts et limites des constellations figuratives

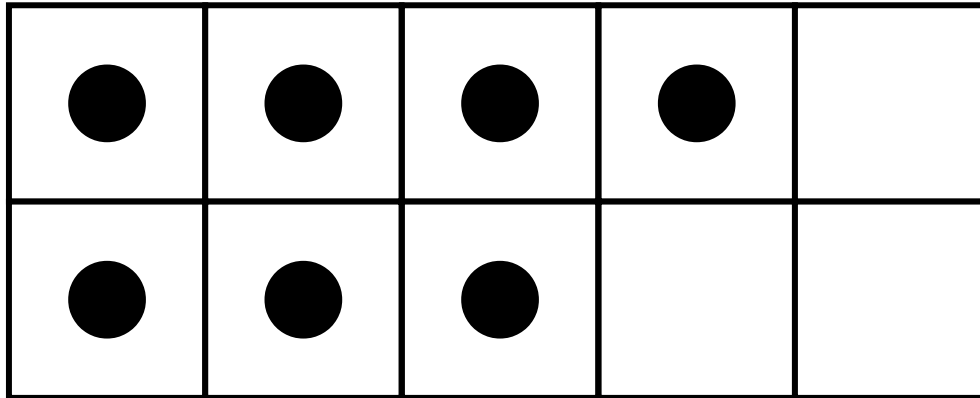


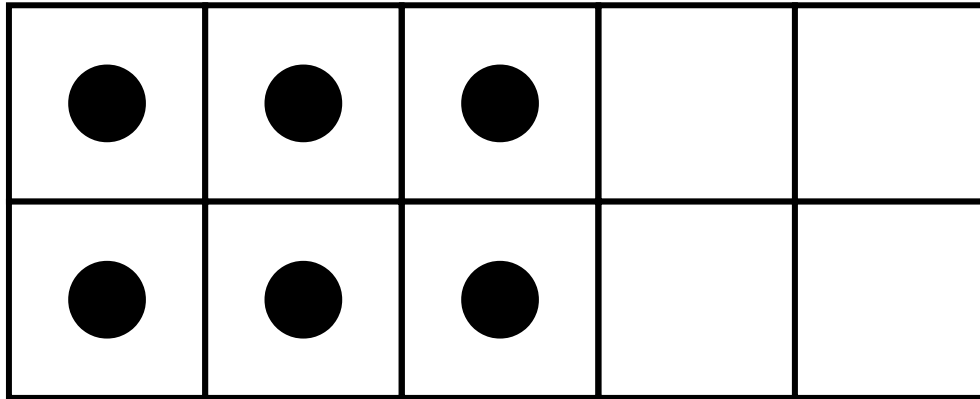
Limites de disposition linéaire





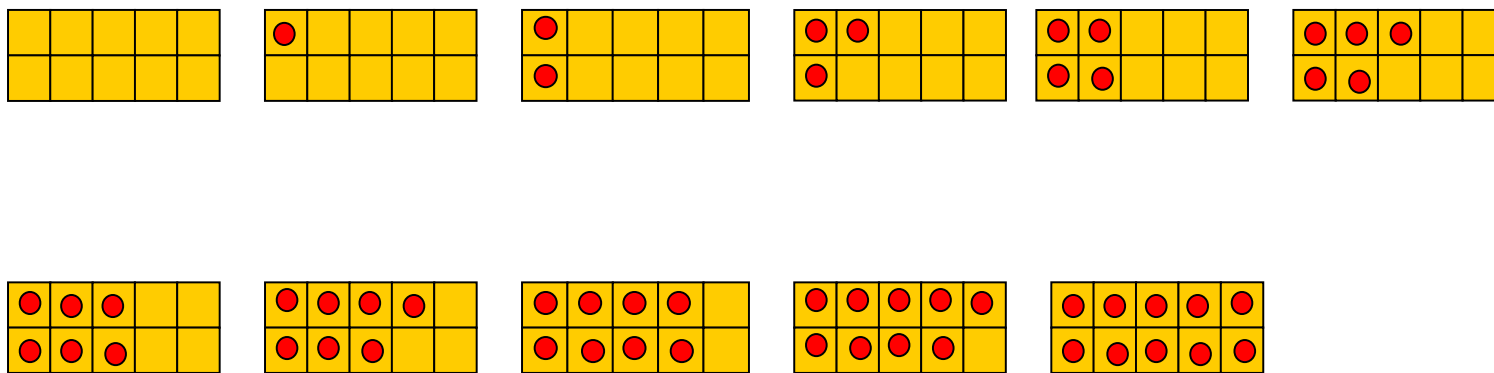
Les cartes à points

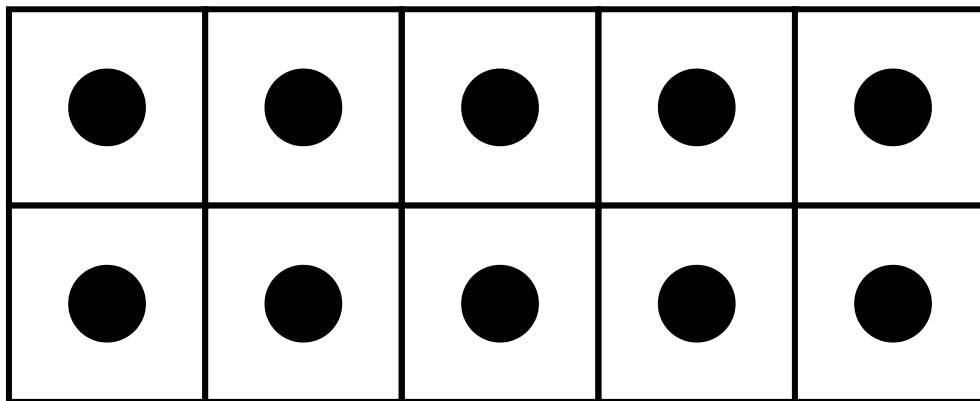




L'observation de la carte à points du nombre 6 permet de voir, entre autres propriétés ...

Le matériel de base des cartes à points est constitué
des 11 grilles suivantes







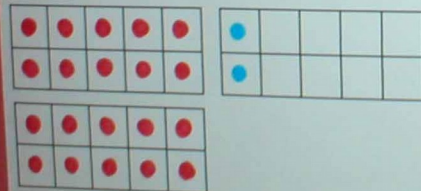
PRESENTS



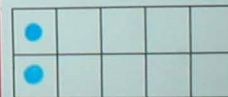
ABSENTS



22



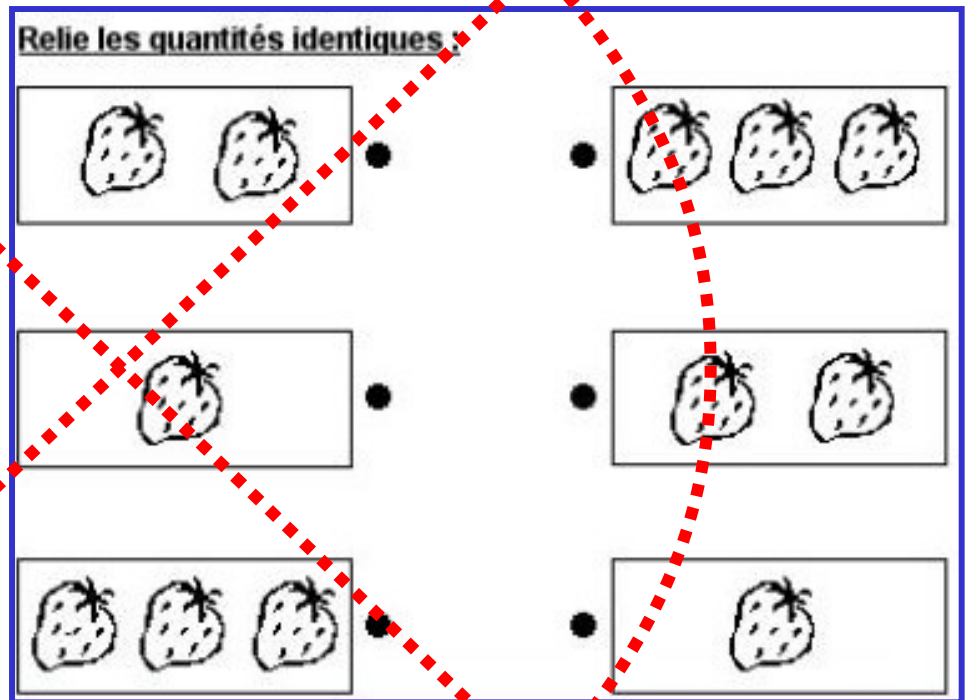
2







Proposer au début des collections homogènes pour lesquelles l'élève peut développer facilement une procédure de quantification (ex comptage)

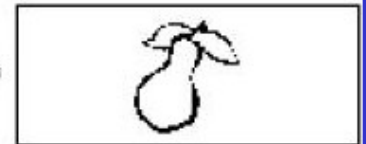
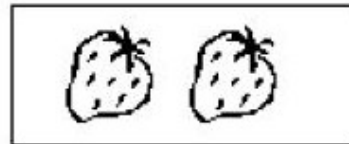


« Dénombrer , des difficultés d'apprentissage liées au principe d'« abstraction » :

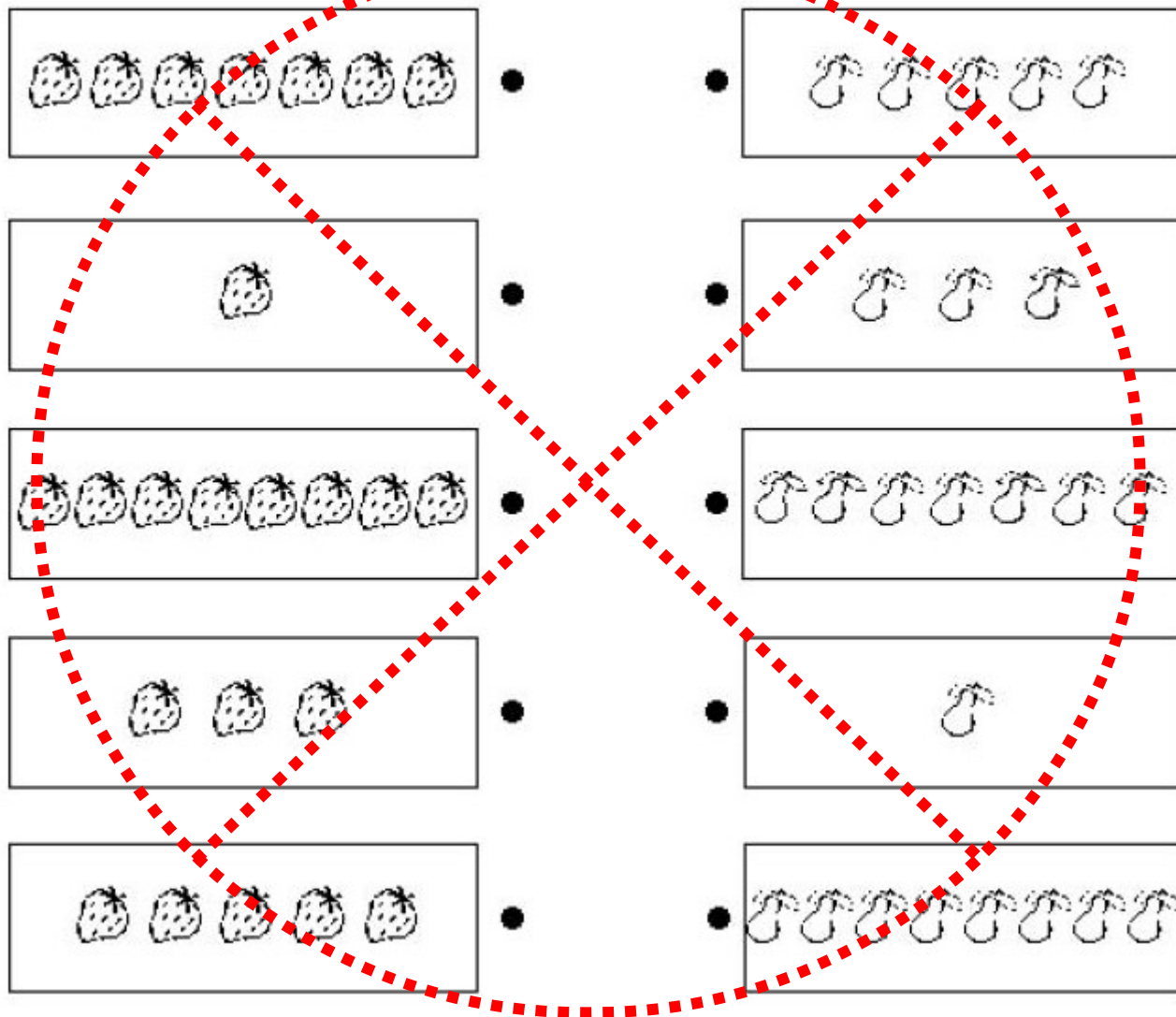
«Cela suppose que l'enfant accepte de renoncer à ce que l'objet représente pour ne s'intéresser qu'à sa valeur mathématique »

De quelle abstraction s'agit-il?
Cf. Piaget, R Gelman ou BM Barth...?

Relie les quantités identiques :

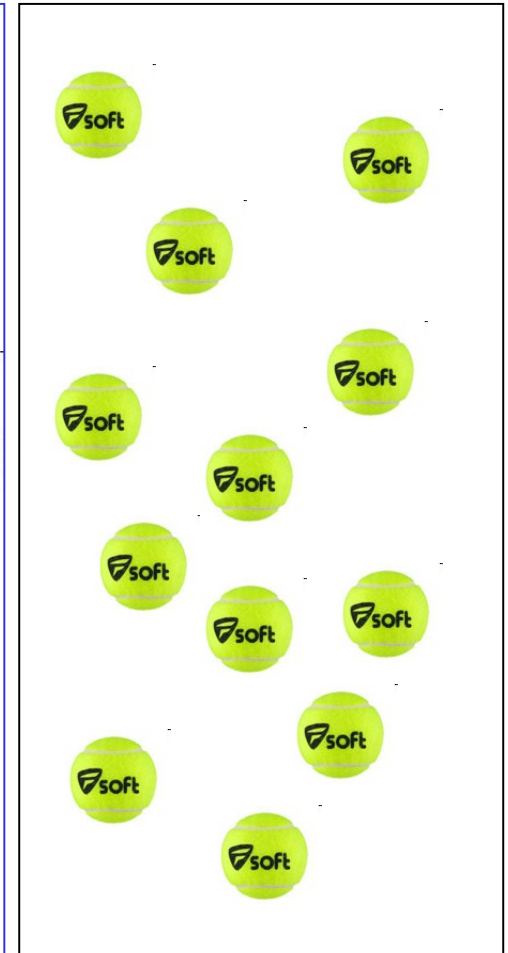
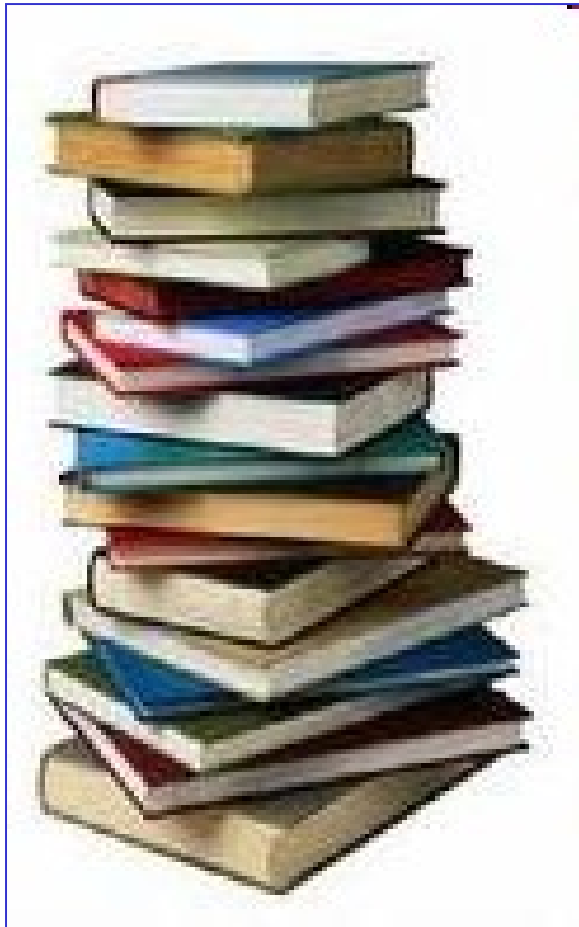


Relie les quantités identiques :



Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

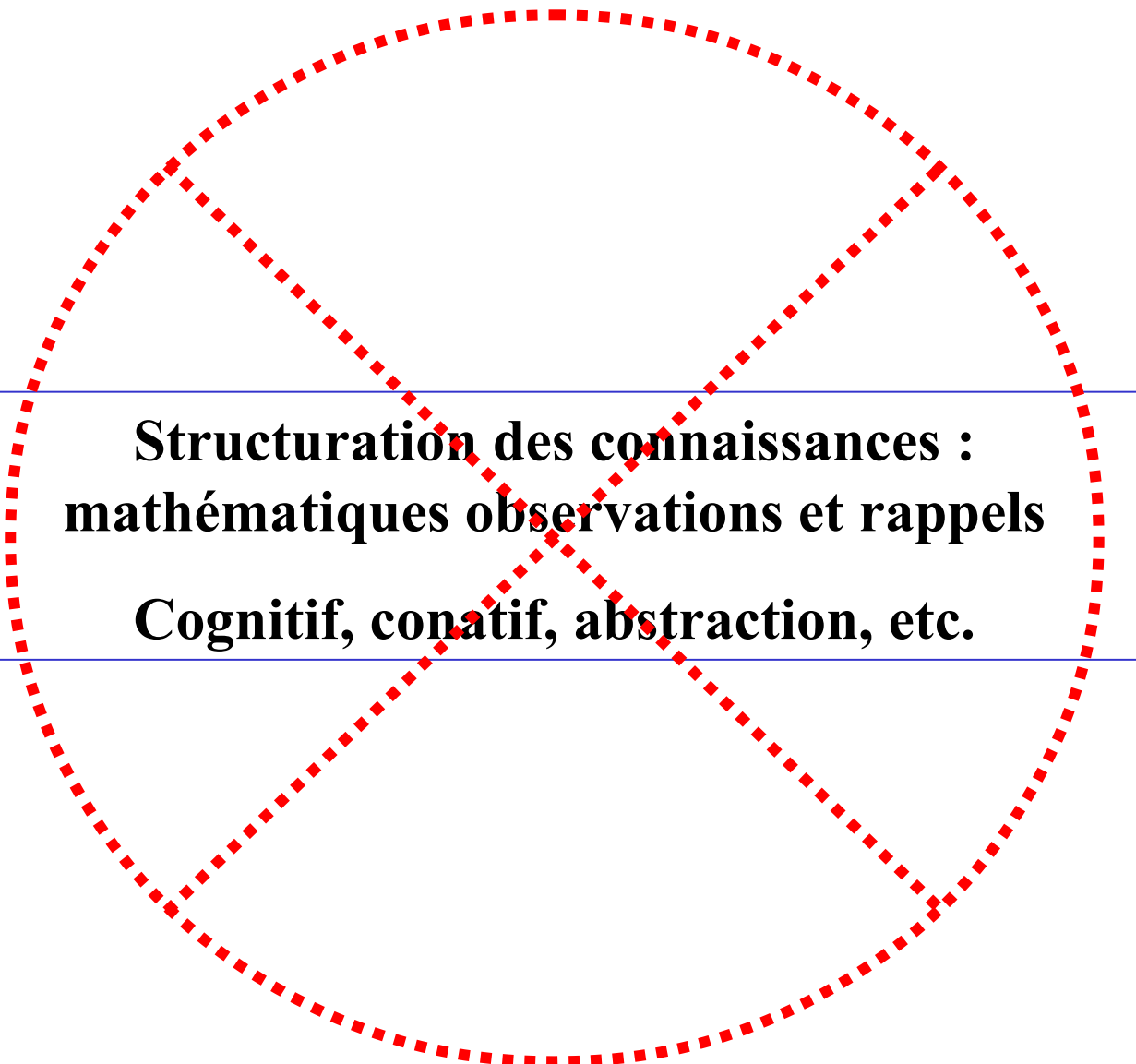
- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.



Exemples de situation à mettre en place

Dénombrer : des difficultés d'apprentissage liées au principe de cardinalité : 4 activités numériques à travailler

- Quantification par comptage : « combien y a-t-il de..? »
- Construction d'une collection : « prends quatre ...! »
- Comparaison de deux collections : « c'est trois ou c'est deux »
- Reconnaissance parmi plusieurs possibilités : « montre moi cinq »



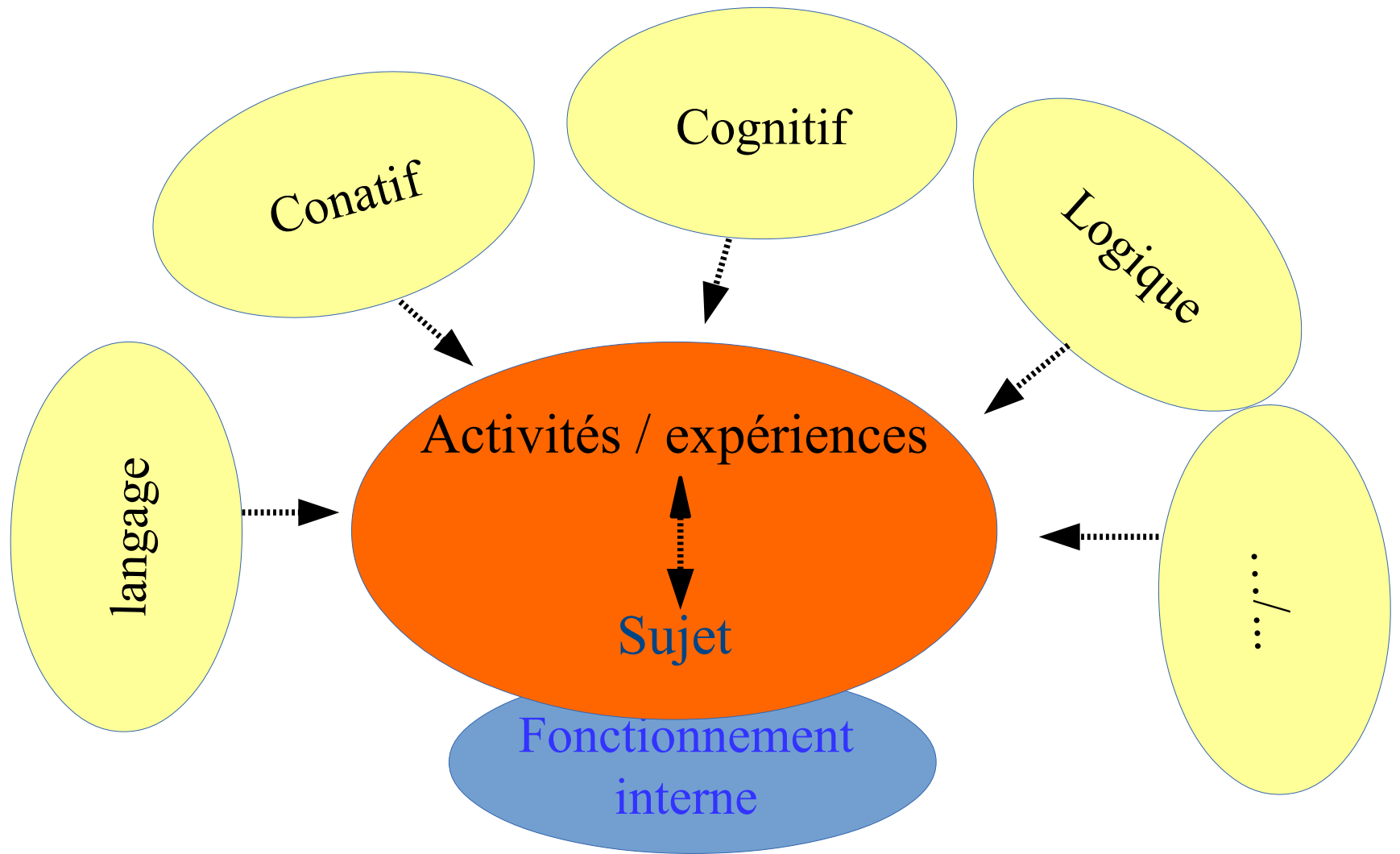
**Structuration des connaissances :
mathématiques observations et rappels
Cognitif, conatif, abstraction, etc.**

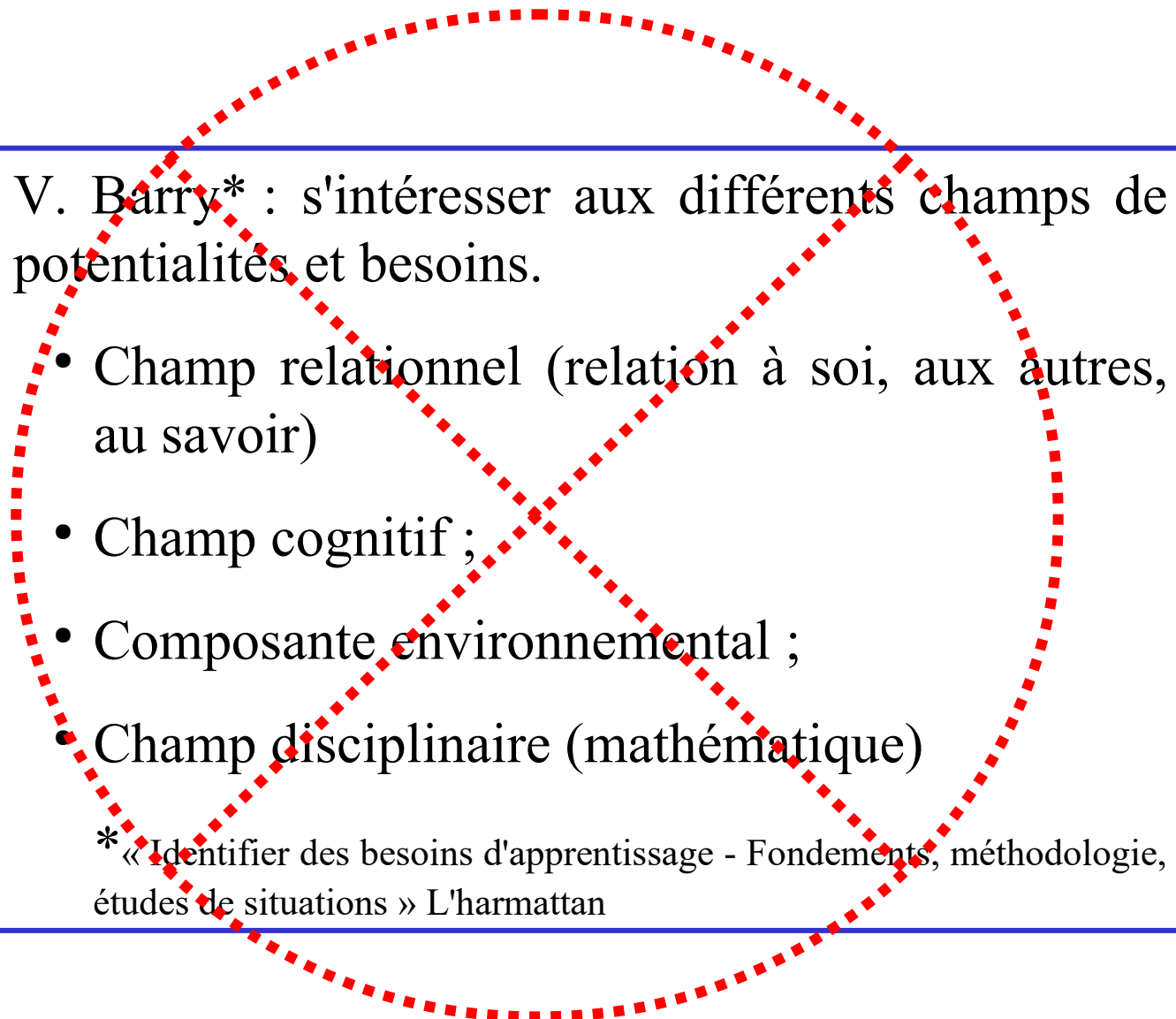
Structures Logico-Mathématiques

“Toute connaissance, tout progrès, toute transformation de notre intelligence est toujours une reconstruction endogène de données exogènes fournies par l’expérience.”

Une structure qui définit un stade est un système d’actions ou d’opérations avec des lois de coordinations (ou de composition) réversibles.”

Elle est cette capacité à exécuter une action dans les deux sens, en “ayant conscience” qu’il s’agit de la même action.





V. Barry* : s'intéresser aux différents champs de potentialités et besoins.

- Champ relationnel (relation à soi, aux autres, au savoir)
- Champ cognitif ;
- Composante environnemental ;
- Champ disciplinaire (mathématique)

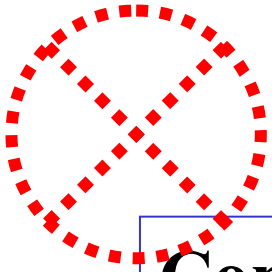
* « Identifier des besoins d'apprentissage - Fondements, méthodologie, études de situations » L'harmattan

M. Perraudau* : s'intéresser aux différentes composantes d'une activité.

- Composante cognitive ;
- Composante conative ;
- Composante langagière ;
- Composante logique ;
- Composante didactique (mathématique)

* Article dans Cahiers pédagogiques N° 436

* « Stratégies d'apprentissage » A. Colin



Construction des connaissances :

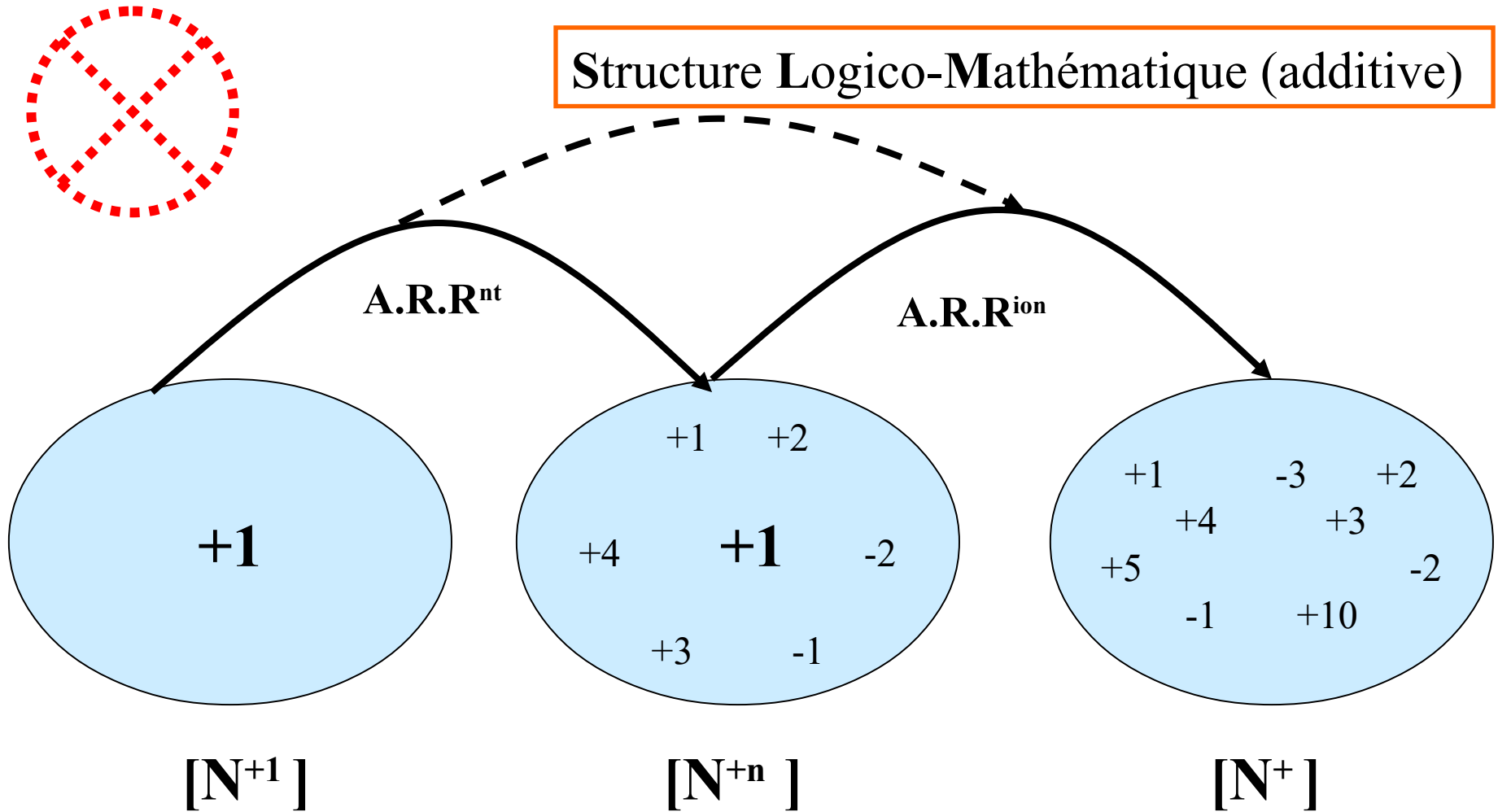
- Relation réel/sujet
- Les mécanismes internes au sujet : les différents types d'abstraction.

• *Exemple de la catégorisation*



• *Exemple du numérique*

Structure Logico-Mathématique (additive)

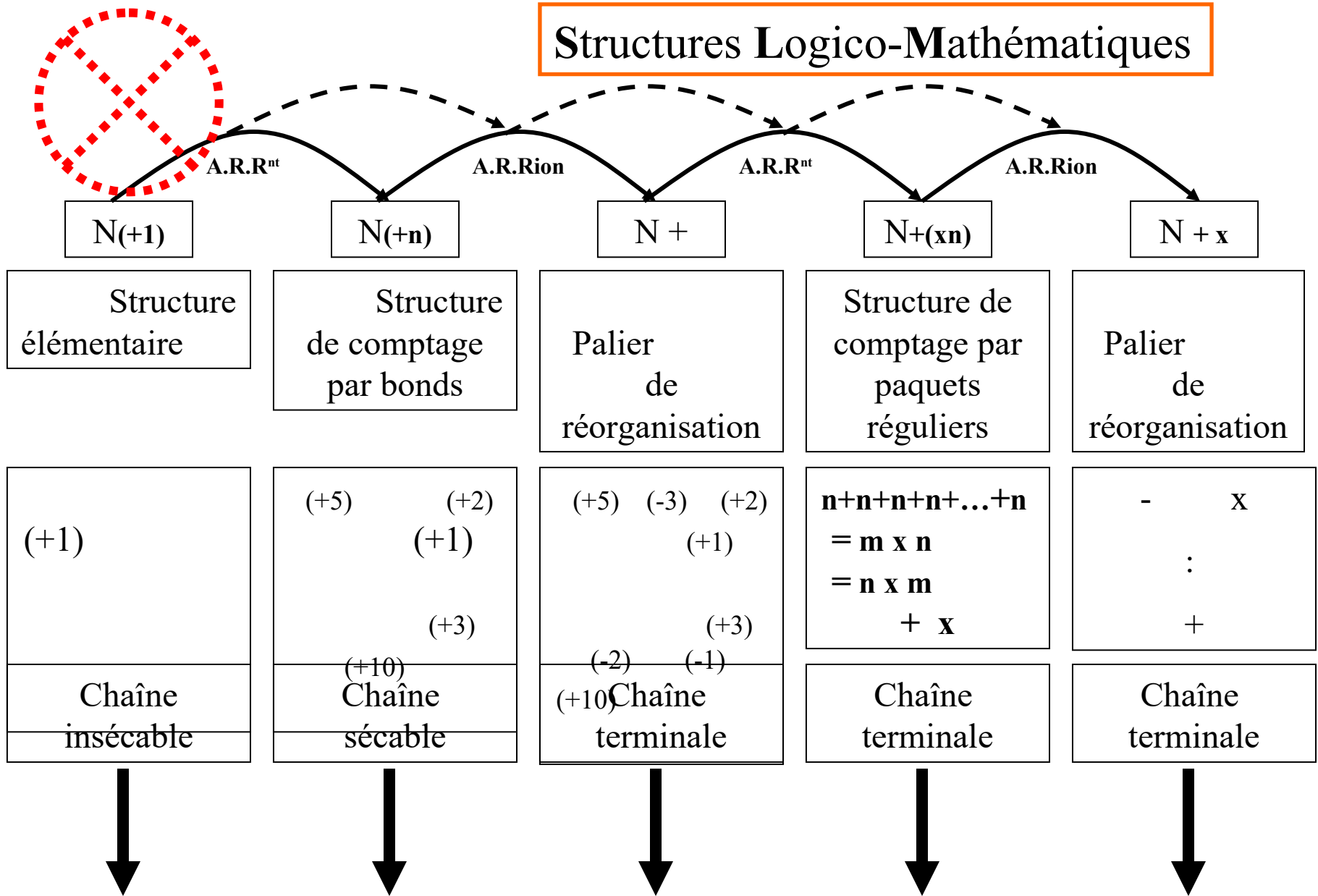


Structure additive.

ARR^{nt} : abstraction réfléchissante de type réfléchissement

ARR^{ion} : abstraction réfléchissante de type réflexion

Structures Logico-Mathématiques



Autres observations et rappels

Différents “sens” du nombre

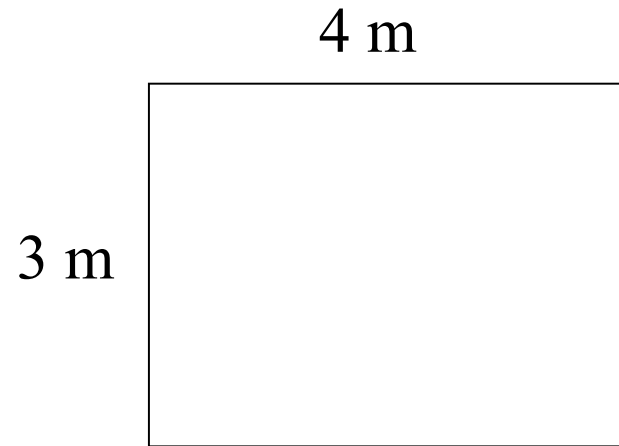
- Sens incarné
- Sens connoté
- Sens inconscient

- Sens intrinsèque
- Sens extrinsèque

Quel le prix de 4 dvd sachant que leur prix unitaire est de 28€ ?

$$4^{\text{dvd}} \times 28^{\text{€}} = 112^{\text{dvd}}$$

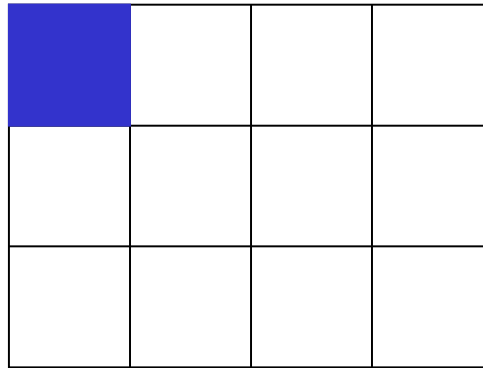
Aire de la surface du rectangle : $L \times l$



Calcul de l'aire :

$$4 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$$

Aire de la surface du rectangle : $L \times l$



Calcul de l'aire :

$$1u \times 4 \times 3 = 12 u$$

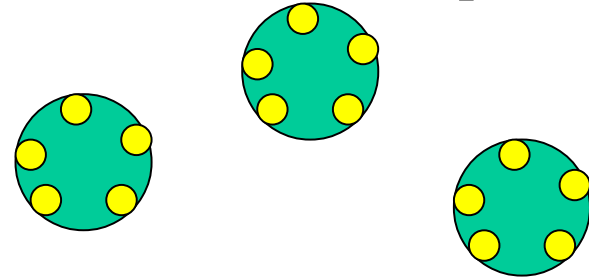
Sens intrinsèque

3 X 5

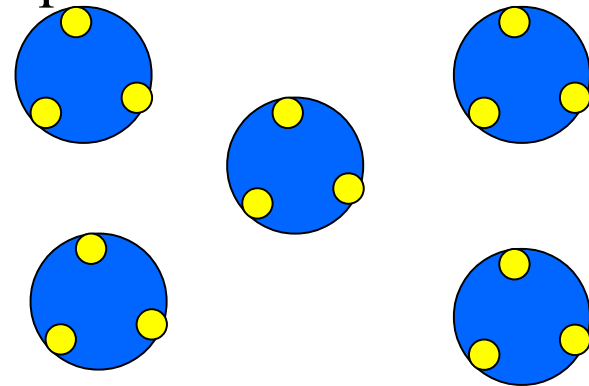


5 X 3

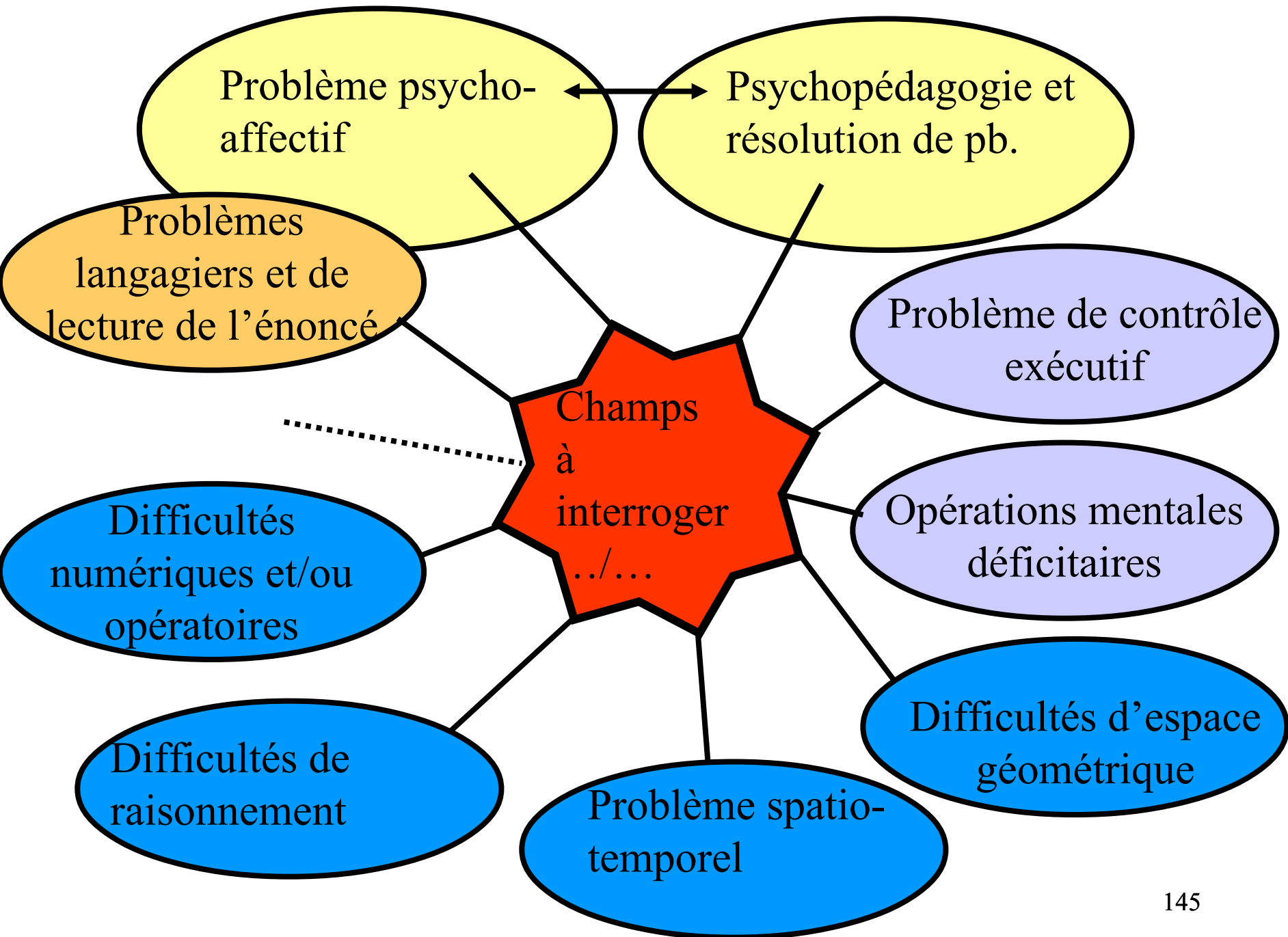
Sens extrinsèque



3 tables de 5 n'est pas
équivalent à 5 tables de 3



A quoi peut donc servir
l'intrinsèque?



Cadre rééducatif : vers une dédramatisation....

>>> Albums pour enfants

« La malédiction des maths »

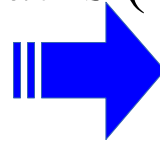
« Des milliards d'étoiles. »

« La cité des nombres. »

Cf sites [ac.clermont](#) /// [croqlivres](#) /// [ac.lyon](#)....

>>> Culture et histoire des maths (numérique)

Le baton d'*Ishango*



>>> Marionnettes

>>> .../...

Albums / Les livres à compter

- Qu'appelle-t-on “livres à compter”?
- Critères de différenciation des livres
 - ✓ Domaine numérique
 - ✓ Croissance / décroissance
 - ✓ Contexte : cardinal, ordinal, mesure
 - ✓ Les activités possibles et leur ouverture (Grands nombres, infini...)

Cf. D. Valentin

Place des comptines numériques

Livret AGIEM au SCEREN

L'invariance du nombre.

Alors que l'on (JPiaget, P. Gréco) a longtemps considéré les activités de dénombrement comme secondaires par rapport au caractère fondamental de la conservations des quantités discontinues, de nouvelles approches (Pénnington, J Grégoire...) nous amènent à une plus grande mesure. Il a été mis en évidence que:

- Le développement des habiletés numériques ne dépendrait pas de l'accès préalables à la conservation du nombre mais plutôt à une stabilité des images mentales...
- Autre constat : le fait d'inciter des sujets à quantifier par comtage avant de les soumettre aux épreuves de conservation (dont ils ne sont pas avertis) entraînerait une amélioration très sensible et systématique des performances (Cf K Fuson)
- Problème de la quotité et de la quantité mis en évidence par P. Gréco
- Dès lors, le problème de la conservation ne semblerait plus devoir se poser. Et pourtant....

Aperçu de la théorie “constructive” de Von Glaserfeld.

(Steffe et Glaserfeld 1985)

L'opération unifiante :

Il n'y aurait pas de nombre possible sans la construction mentale de la totalité.

La construction de l'unité :

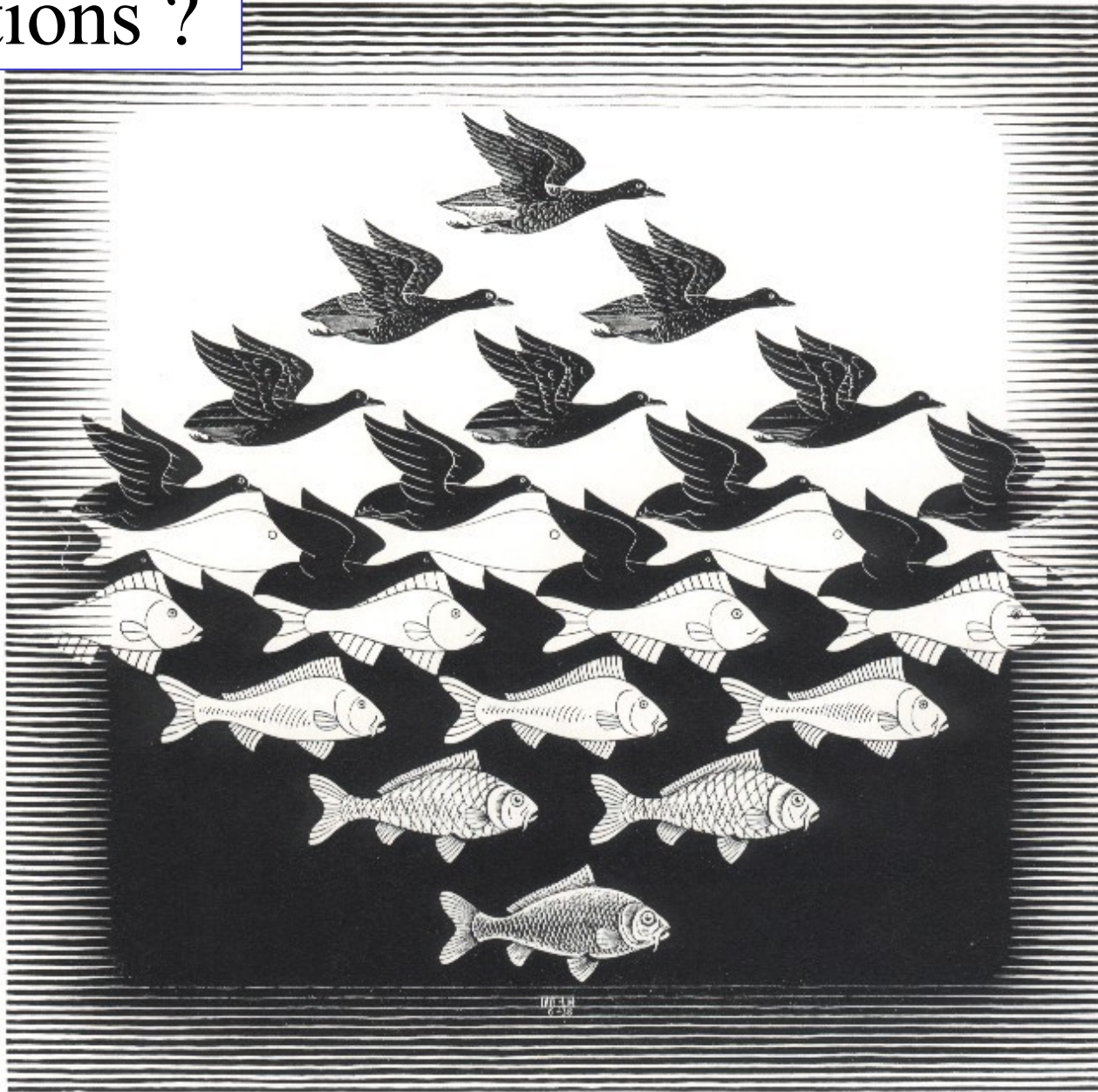
L'unité n'est pas donnée d'emblée, l'unité d'un comptage est une création mentale.



L'itération :

L'enfant doit apprendre que la relation de succession sur les mots-nombres (“sept” est le suivant de “six”), signifie, au niveau des nombres, l'ajout d'une unité, c'est un de plus que six.

Questions ?



repérer les compétences et les difficultés de chacun

Repérer les connaissances de la chaîne numérique verbale...

Utilisation entre autres d'EVALDIM, d'items de tests existants (Batelem r, TEDI Math...) ou d'évaluations institutionnelles.

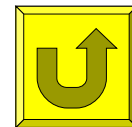


Genèse de l'enfant en classification...

Classifications :

⇒ Classes schématiques

⇒ Classes taxonomiques



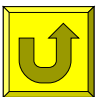
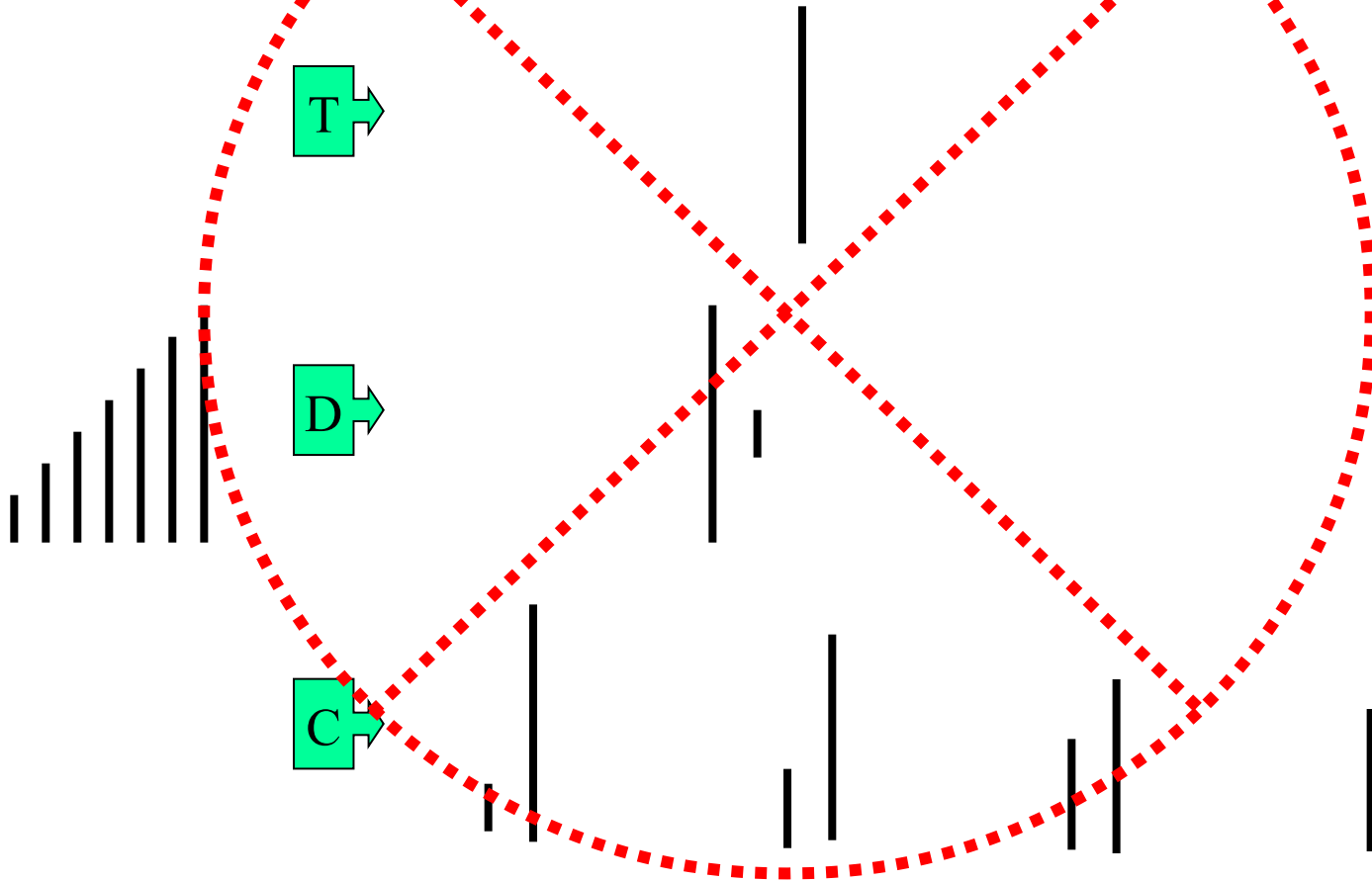
La genèse des structures logiques élémentaires la sériation

Manipulations d'objets variés.

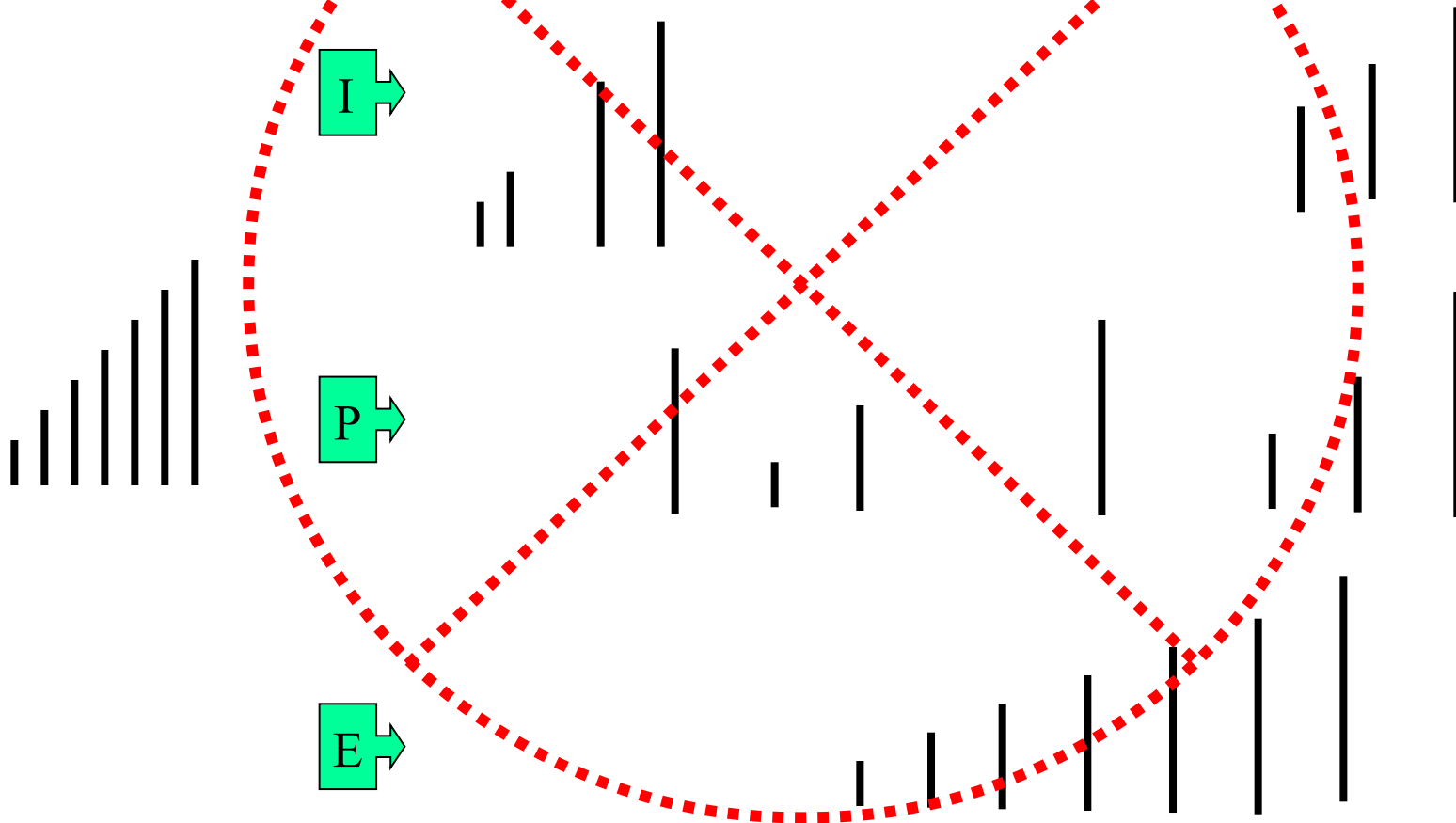
- Petit / Grand
- Creux / Plein
- Chaud / froid
- Petit / Moyen / Grand
- Froid / tiède / chaud *

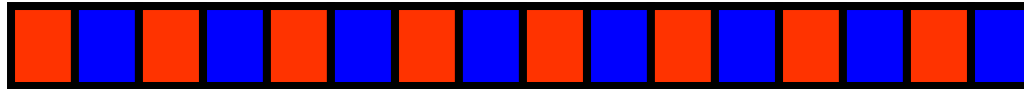
* « Contrastes. » B Aucouturier

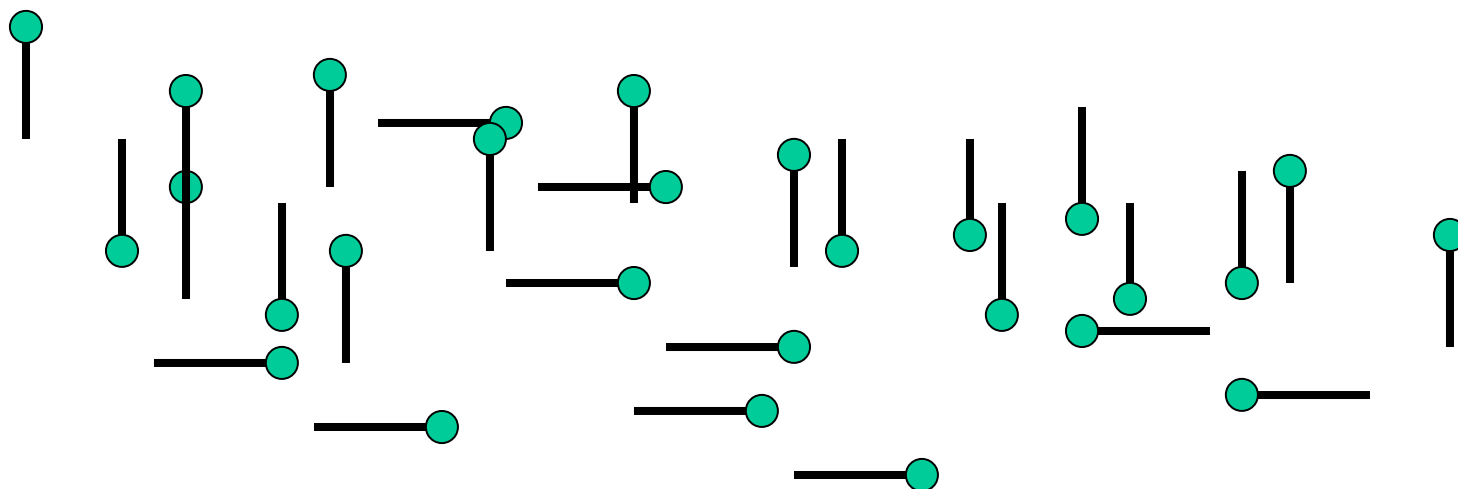
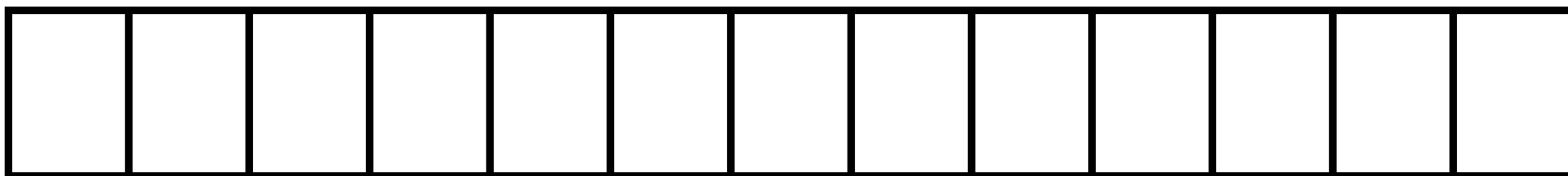
La genèse des structures logiques élémentaires la sériation

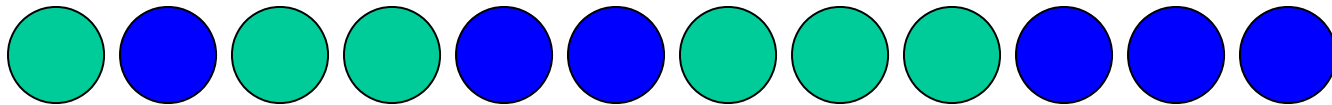
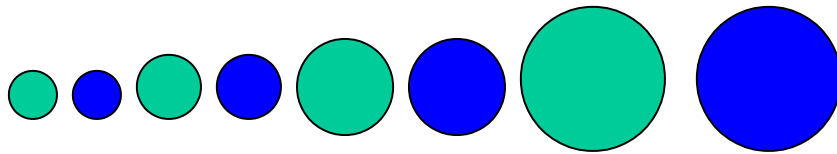


La genèse des structures logiques élémentaires la sériation









Une étape cruciale fut de découvrir le zéro... ou plutôt deux étapes...

1. Le zéro apparaît au niveau des notations, c'est alors une symbolique qui ne désigne en réalité qu'une place vide pour une des puissances de la base. Il n'est pas encore un nombre de plein droit...IVème S avt JC en Mésopotamie
2. Pour comprendre la difficulté conceptuelle du zéro, il suffit de réfléchir à comment dénombrer ce qui manque ? Peut-on prendre en compte l'absence de quelque chose et surtout de concevoir que cette absence puisse avoir une puissance opératrice.

Quel géomètre ira se préoccuper d'un segment de longueur nulle ?

Comme l'infini, le zéro fait peur aux grecs.

La première trace du zéro nous parvient des **babyloniens** (3e siècle avant J.C.).

Comment écrire par exemple le nombre « 305 » si on ne dispose pas du symbole « 0 ». On peut écrire « 3 5 », mais ne risque-t-on pas de confondre avec « 35 » ?

les savants **mayas** développeront au cours du 1er millénaire de notre ère un système de numération performant et inventent un « zéro »

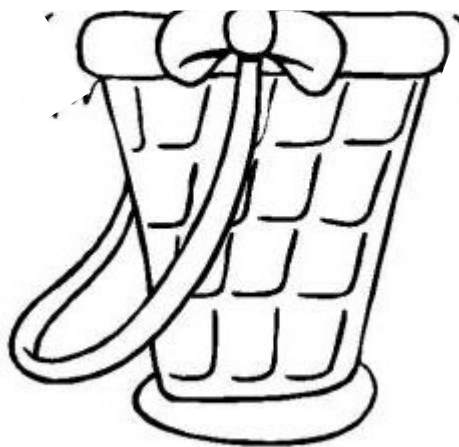
Mais le coup de génie viendra de l'**Inde** où le zéro apparaît vers le Vème siècle (Hindi)

Sunya signifie vide en Sanscrit, le zéro est représenté par un petit rond (pourquoi un rond? on ne le sait pas vraiment.).

Traduit en arabe, *sunya* devient *Sifr* (le vide).

A la renaissance le zéro n'est plus seulement un symbole utilisé pour marquer un vide, mais il devient un nombre à part entière.

- Zéro-chiffre
- Zéro-nombre
- Zéro-origine

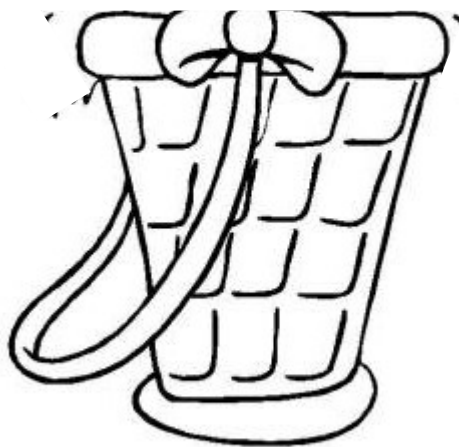


+

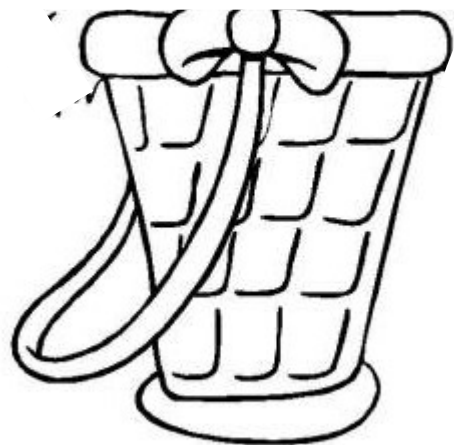


=

$$0 + 5 =$$



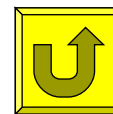
+

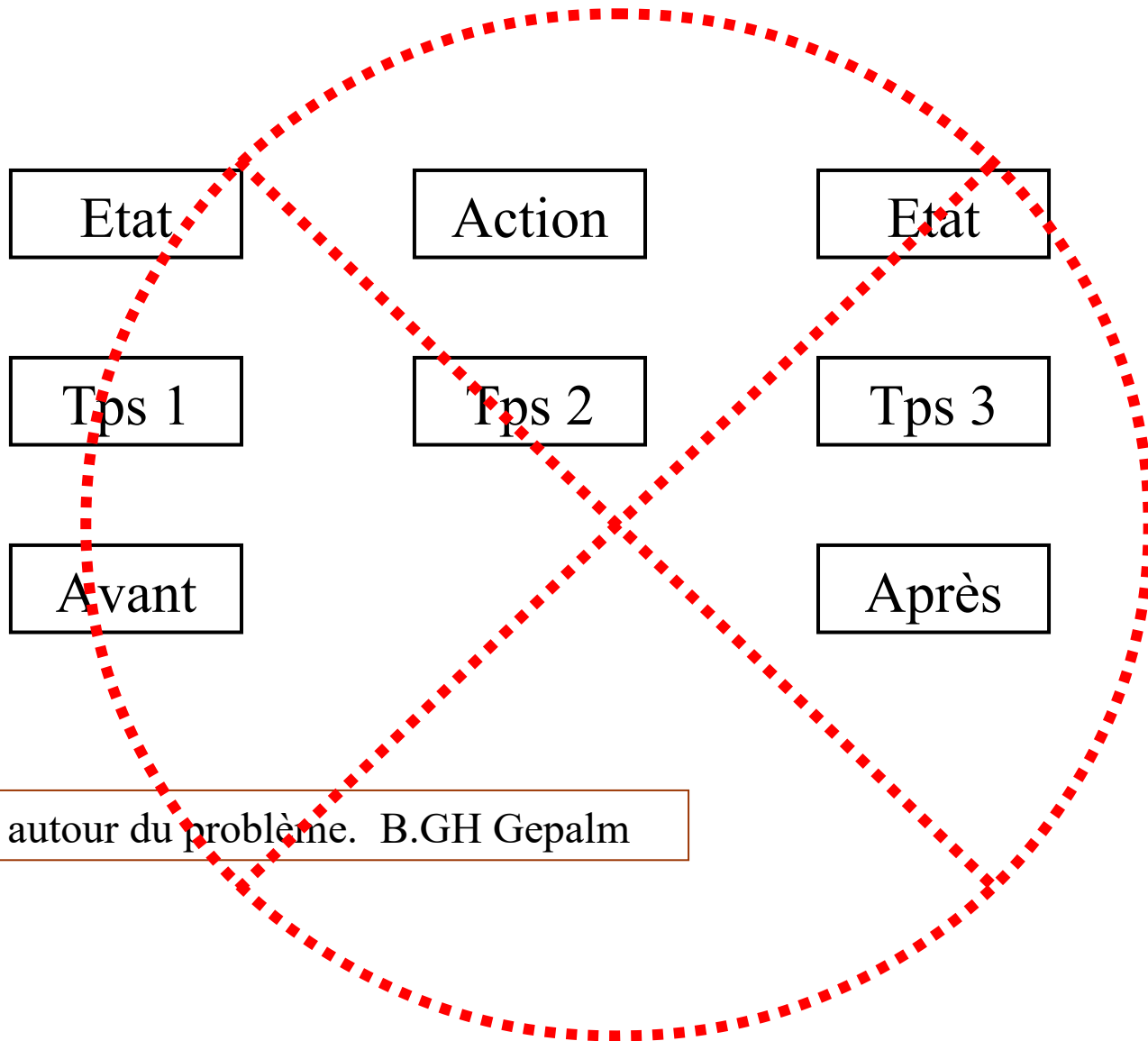


=

$$0 + 0 =$$

$$\begin{array}{c} 0^0 = \\ \\ ? \\ \\ 0^1 = \end{array}$$

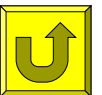


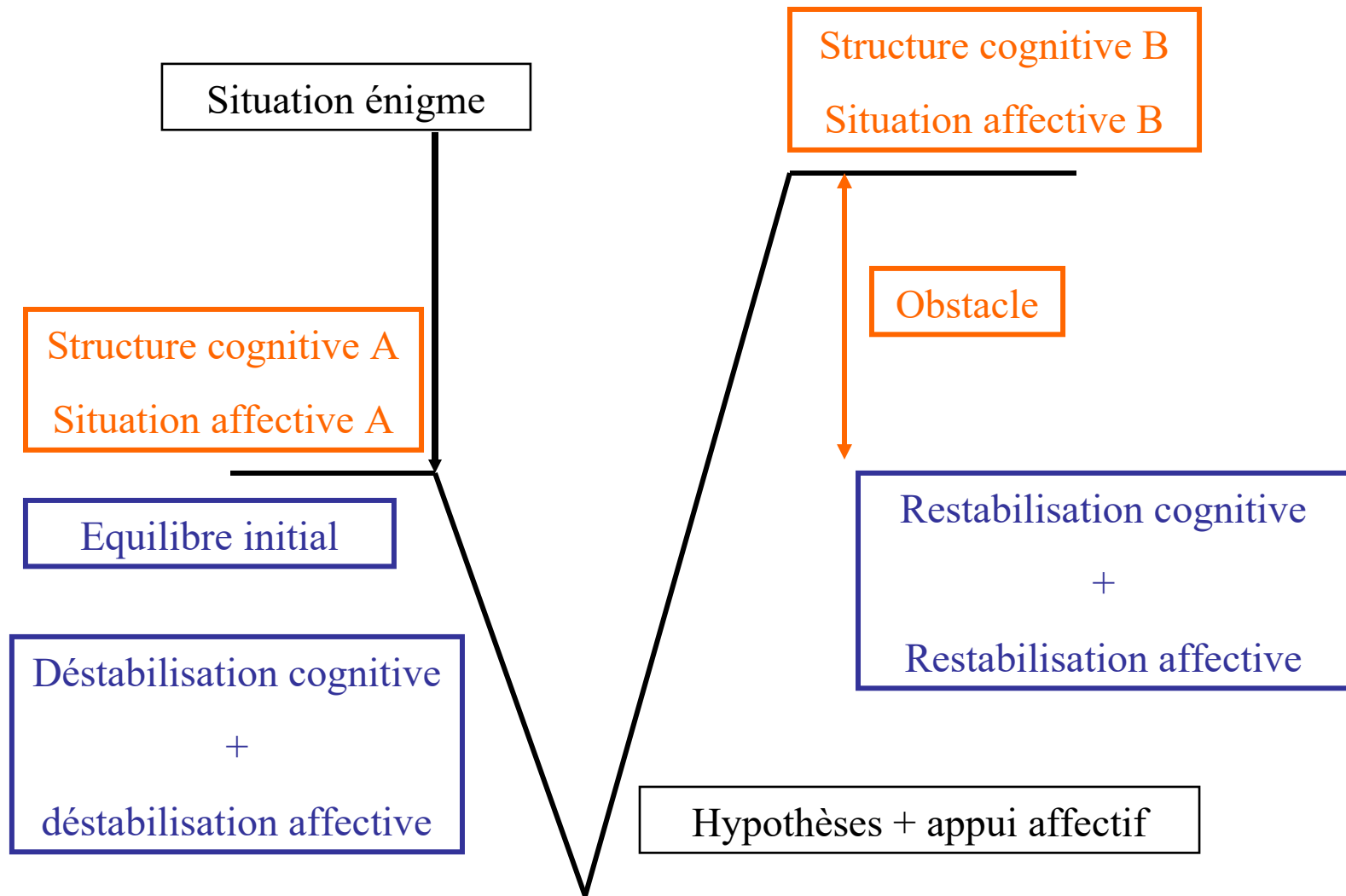


Travailler autour du problème. B.GH Gepalm



Combien y a t-il de paires de chaussures ?





“La dimension affective est corrélative de la dimension cognitive.” M. Develay



3

$5/3$

- 49

45,068

$\sqrt{2}$

256

$7^{0,75}$



Composante de la mémoire de travail	Effet au niveau de l'arithmétique
Administrateur central	Récupération des connaissances générales sur le nombre. Récupération et application des procédures (retenues, etc.) et des « stratégies » (comptage, etc.) Maintien d'une trace mnésique des étapes
Boucle phonologique	Comptage Maintien des valeurs intermédiaires
Calepin visuo-spatial	Caractéristiques visuelles des problèmes Maintien des informations spatiales (position des chiffres, terme à plusieurs chiffres, etc.)

Apprendre à compter...Pour quoi faire ?

