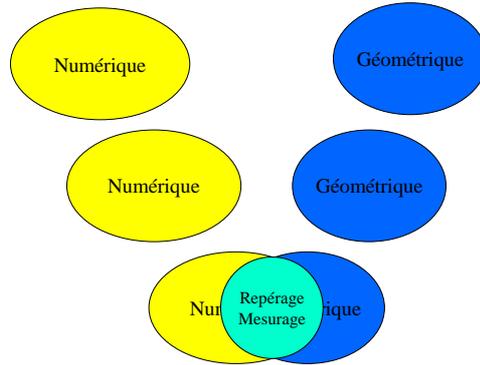


Problématique des situations mathématiques
et
élèves en difficulté.
Comprendre et intervenir à l'école
élémentaire.

M. Vinais
Responsable de la filière ASH
IUFM Centre Val de Loire
Université d'Orléans
michel.vinais@univ-orleans.fr

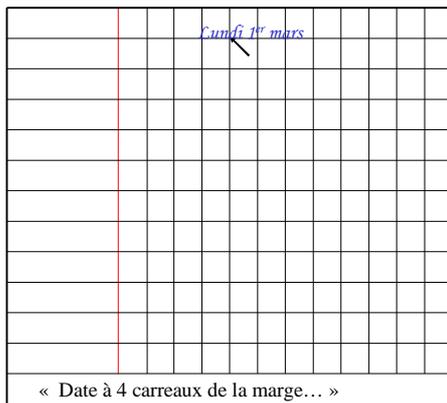
Doc.M.Vinais 06.2011

1



Doc.M.Vinais 06.2011

2



Doc.M.Vinais 06.2011

3

LE PROBLEME

Emmanuelle et Violaine étaient bien embêtées. La maîtresse leur avait donné le problème suivant, qui leur paraissait très difficile.

« Le chemin de l'école a une longueur de 800 m. Sachant qu'un hectomètre est planté de trois chênes, de deux hêtres et d'un bouleau, combien le chemin de l'école contient-il d'arbres de chaque espèce ? »

Quel ennui ! Les petites étaient si désespérées que leurs jeunes amis, les animaux de la ferme, décidèrent de leur venir en aide. Tous leurs efforts furent inutiles, et chacun était prêt à abandonner quand arriva la petite poule blanche.

« Puisqu'il s'agit de trouver le nombre d'arbres du chemin de l'école, allons donc les compter, propose-t-elle finalement. C'est si près d'ici. » Les petites se mirent en marche. Chacune prit part à l'opération et c'est ainsi que, finalement, les enfants eurent la solution du problème. Le lendemain, à l'école, elles la proposèrent.

Malheureusement, ce n'était pas celle que la maîtresse attendait.

D'après Marcel Aymé, Les contes rouges du chat perché, éditions Gallimard.

Résolution de problèmes mathématiques

M. Vinais
Chargé de mission ASH
Université d'Orléans
IUFM Centre Val de Loire

Extrait « Maths en fête CE2 » Sous la direction D. Barataud avec L. Brunelle, F. Boule...

4

A propos de la résolution de problèmes.

Les programmes de mathématiques, dans leur rubrique « finalités et objectifs », évoquent à plusieurs reprises la « résolution de problèmes ». Afin d'éviter des quiproquos, il convient de bien clarifier les différentes places que l'on peut accorder à la résolution de problèmes suivant la « stratégie d'enseignement » adoptée par le professeur pour provoquer l'apprentissage chez ses élèves.

La situation intervient dans un second temps, elle permet alors le réinvestissement de connaissances pour résoudre une situation (résolution de problèmes mathématiques);

ou

La situation vise et permet l'émergence d'une nouvelle connaissance. On parle plutôt de situations problèmes (Cf G de Vecchi).

Doc.M.Vinais 06.2011

5

Bibliographie :

- « Situations-problèmes et savoirs scolaires. » M. Fabre PUF
- « Les activités mentales en résolution de problèmes : comprendre, raisonner, trouver une solution. » JF Richard A. Colin 90
- « Moniteur en résolution de problèmes. » G. Vergnaud Nathan
- « Représentations des problèmes et réussite en mathématiques. » J. Julo PU de Rennes
- « L'écolier et le problème en mathématiques » INRP Rencontres Pédagogiques N°4
- « Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques. » J. Briand Hatier
- Série « ERMEL »
- « Pensée mathématique et gestion mentale » A. Taurissin Bayard 97
- « Apprendre à raisonner, apprendre à penser. » M. Giry Hachette Educ 94
- « Aider les élèves à apprendre. » G de Vecchi Hachette
- « Faire construire des savoirs. » G de Vecchi Hachette
- Revues « Repères pour agir » ; Doc. D'accomp.; RFP et « Sciences humaines »

Sources :

M. Fabre, J. Julo, J. Houdebine, R. Charnay, G. Vergnaud, G. Brousseau, R. Douady, J. Briand, R. Brislaud, MC Escarabajal, Ph. Meirieu, D. Barataud, A. Pressiat, S. Baruk, O. Bassis, A. Descaves, GEPALM, B Guerritte-Hess, M. Bacquet, H. Planchon, C. Larère, J. Nimier, ML Lafortune ...

<http://revue.sesamath.net/spp.php?article150>

Doc.M.Vinais 06.2011

6

Références institutionnelles

- Socle commun des connaissances et compétences
- Programmes de l'école

Donner aux élèves la culture scientifique nécessaire à une représentation cohérente du monde et à la compréhension de leur environnement quotidien.

Dans chacun des domaines que sont le numérique (calcul), la géométrie et la gestion des données, les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne.

Pourquoi faire des mathématiques, et plus particulièrement des problèmes?

Parce que ça sert...

Une raison
utilitaire

Décrire et agir sur le
réel, anticiper les
événements...

Compétences

Une raison
d'être

Développer ses capacités
de raisonnement,
comprendre le monde...

Attitudes

La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par **la résolution de problèmes**, notamment à partir de situations proches de la réalité...

Le BO du 14 février 2002

Au cycle III, ce domaine recouvre l'ensemble des problèmes dans lesquels les nombres et le calcul interviennent comme outils pour traiter une situation, c'est-à-dire pour organiser, prévoir, choisir, décider : le raisonnement y occupe une place importante / confronter les élèves à de véritables situations de recherche / Plus nous avançons dans le cycle III plus nous pensons indispensable de proposer aux élèves des **situations de recherche qui constituent pour eux un défi intellectuel**. De plus, ces situations contribuent à **développer chez les élèves une représentation des mathématiques comme un domaine où l'on cherche**.

Le travail sur l'apprentissage à la résolution de problèmes présente plusieurs caractéristiques : il incite à la mobilisation de savoirs construits dans des domaines différents, il met en jeu des compétences relatives à des attitudes, des comportements qui se développent sur le long terme (comme prendre du recul par rapport à sa propre méthode, contrôler ce que l'on est en train de faire, comparer des méthodes).

BO du 19 juin 2008

La **résolution de problèmes** liés à la vie courante permet d'approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement.

Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas ;

- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat ;

- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques.

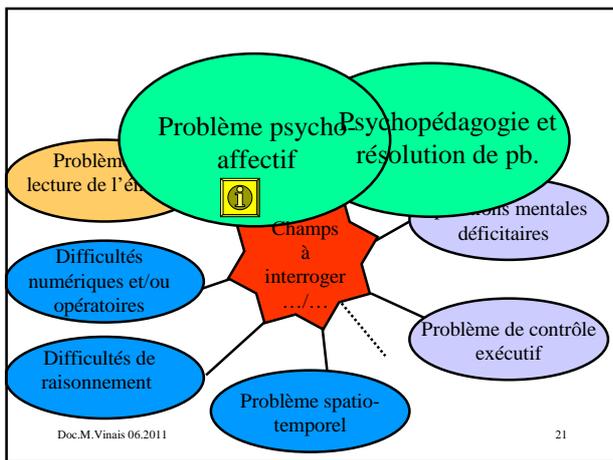
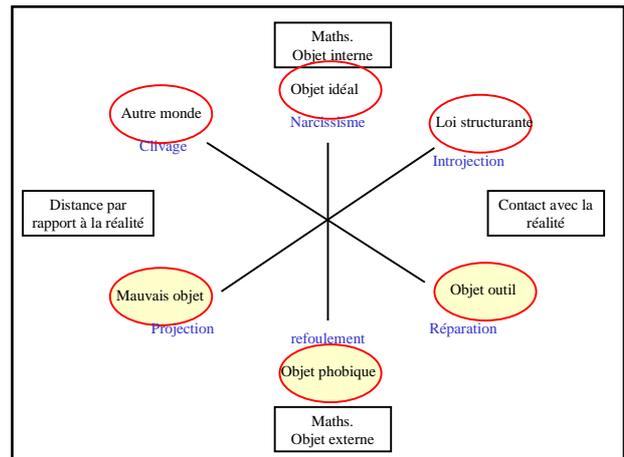
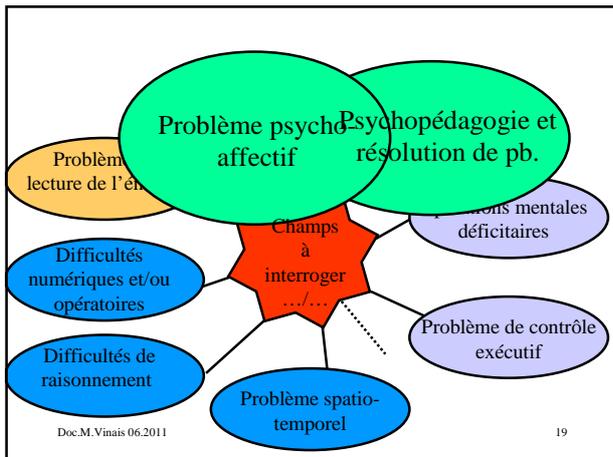
Confusions autour de la notion de problème

EXERCICES

- Situation connue
- Méthode déjà acquise
- Application, reproduction,
- Exécution mécanique.
- Consolidation d'un savoir
- Entraînement, automatisme
- Assimilation

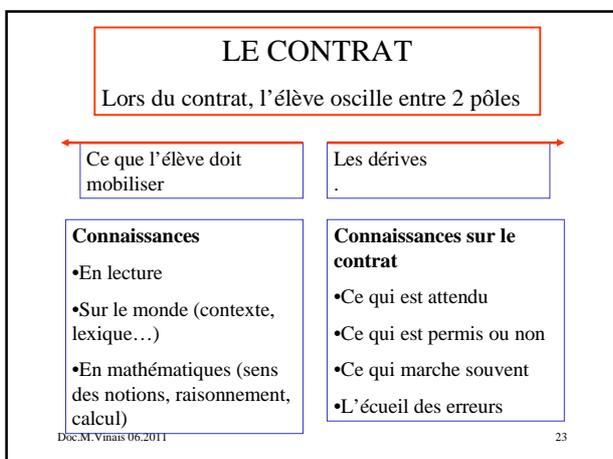
PROBLEMES

- Situation inédite
- Méthode inconnue
- Création
- Processus à inventer
- Acquisition d'un savoir
- Intégration de procédure
- Accommodation



Prendre la posture de chercheur...
 ...chercheur de sens (Cf G Chauveau en lecture)

Doc.M.Vinai 06.2011 22



L'élève chercheur de sens et la relation pédagogique

Du contrat didactique...
 Du discours « logique »...
 et du paradoxe en mathématique...
 dans la résolution de problème...

- l'âge du capitaine de S. Baruk
- La logique du discours...
- Problème et paradoxe

Doc.M.Vinai 06.2011 24

L'âge du capitaine de S. Baruk ?

*Dans un bateau, il y a 36 moutons.
10 moutons tombent à l'eau.
Quel est l'âge du capitaine ?*

3/4 des élèves de CE1
et 1/3 de CM trouvent l'âge du capitaine

Enoncé 1 :

Enoncé 2 : Dans une classe, il y a 15 garçons
et 14 filles, quel est l'âge de la maîtresse ?

Enoncé 3 :

Du problème et de la logique du discours...

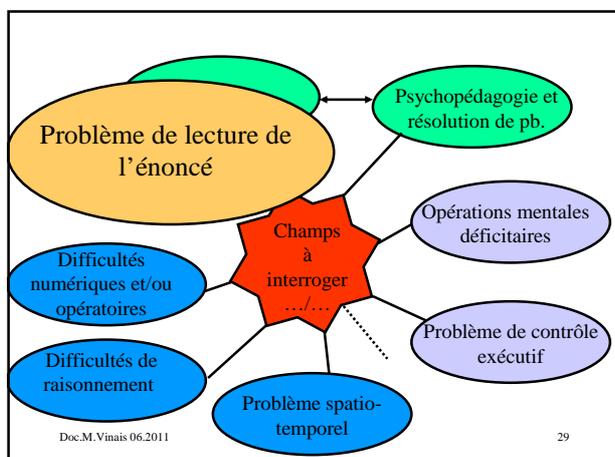
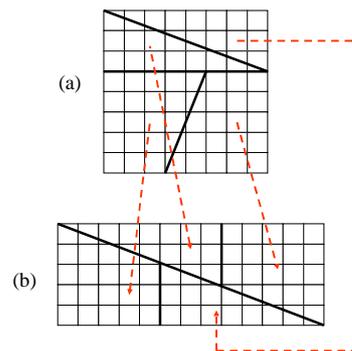
Trois amis s'en vont manger au restaurant. Ils prennent le menu du jour à 10€. Ils demandent au patron la note qui leur fait parvenir par la serveuse : total 30€. Lorsque la serveuse apporte les 3 billets de 10 € le patron décide de leur faire une ristourne de 5€ que ramène la serveuse. 5€ n'étant pas divisible par trois ils décident de reprendre chacun 1 € et de donner 2 € à la serveuse.

Combien chacun a-t-il payé ?

Discours de Paul : chacun avait donné 10 €, il a repris 1 €. Il a donc payé 9 €

Contestation de Pierre : Au départ il y a 30 € dans l'acoupelle, s'ils ont payé 9 €, au total cela fait 27 € plus les 2 € donnés à la serveuse, cela fait 29 €, il manque 1 € !

Du problème et du paradoxe...



Mathématique et langages

Pour résoudre un problème l'élève doit mettre en place, lors de la lecture de l'énoncé, un processus de compréhension à 2 niveaux, processus dont il est plus ou moins conscient :

1^{er} niveau : la compréhension textuelle qui relève du traitement linguistique

2^{ème} niveau : la compréhension relationnelle qui repose sur la capacité à mettre en relation les éléments de la situation de départ et relève également des connaissances et de la capacité de l'élève à mettre en réseau ses connaissances mathématiques.

Passage difficile du sens à la mathématisation.

Mathématique et langages

Une caractéristique essentielle de l'énoncé mathématique réside sans doute dans la présence de 3 codes en interaction*.

- Langage naturel
- Langage mathématique
- Langage symbolique

*Cf Thèse de didactique des maths : langue naturelle et écriture symbolique. C. Laborde

Énoncés de problèmes et progression thématique.

Mathématique et langages

Une caractéristique essentielle de l'énoncé mathématique réside sans doute dans la présence de 3 codes en interaction*.

- Langage naturel
- Langage mathématique
- Langage symbolique

*Cf Thèse de didactique des maths : langue naturelle et écriture symbolique. C. Laborde

Énoncés de problèmes et progression thématique.

PTC Une école décide de s'équiper en informatique. Elle achète 8 unités centrales à 480€. Elle commande 8 écrans plas à 200€...Elle

PTL Une famille décide d'acheter une voiture neuve à 13 499€. Il paie un acompte de 6000€ et le reste par un crédit. Parmi les offres des banques, ils en retiennent 2 : la proposition de 48 mensualités à... du Crédit xxx et la proposition de la banque ZZZ de...

PTE Une classe décide de découvrir le milieu marin en classe transplantée à VVV et s'interroge sur le coût total de cette classe découverte.

Pour le voyage ils ont le choix entre le car sachant que le transport revient à ...€ par élève ou le train....

En ce qui concerne l'hébergement et l'alimentation ils peuvent....

Plusieurs visites sont prévues mais le budget est limité à ...€ alors il leur faut choisir entre...

Comprendre le vocabulaire et les expressions mathématiques.

- des rangées de 12 salades
- les rangées ont 12 salades chacune
- une rangée a 12 salades
- chaque rangée a 12 salades
- 12 salades par rangée
- 12 salades pour chaque rangée

- des gâteaux coûtent 2€ pièce
- des gâteaux coûtent 2€ l'un
- des gâteaux coûtent 2 € l'unité

Formulation et contexte de présentation de la situation.

Ce qui intervient dans l'accès au sens de l'énoncé :

- Trois « niveaux » de lecture du texte
- Place de la question;
- L'ordre d'apparition des informations;

Formulation et contexte de présentation de la situation.

Trois types de texte :

Pour construire une première interprétation de la situation et de la tâche attendue, la compréhension d'un énoncé requiert à la fois :

- Une lecture narrative;
- Une lecture informative;
- Une lecture prescriptive.

Formulation et contexte de présentation de la situation.

Une lecture narrative

Une lecture informative

Une lecture prescriptive

Une maman va faire des courses. Elle achète du cacao à 4€20, de la lessive à 9€45 et un paquet de pâtes à 1,12€. Elle donne un billet de 20€.
Combien la caissière doit-elle lui rendre?

La place de la question

Dans les 4 énoncés suivants : surligne en orange la partie du texte qui précise au lecteur ce qu'il doit faire.

1. Range ses quatre enfants du plus petit au plus grand :
Anna est plus grande que Caroline.
Frédéric est plus petit qu'Anna.
Tristan est plus grand que Caroline et plus petit que Frédéric.

2. Combien d'albums Zoé peut-elle remplir avec 248 timbres, sachant qu'un album contient 50 timbres ?

4. Un marchand de cycles a vendu pendant la semaine :
- 2 motos à 3642€ la moto ;
- un scooter à 1299€ ;
- 7 casques à 158€ pièce.
« Cette semaine, j'ai vendu pour près de 10 000€ de marchandise », se dit-il.
A-t-il raison ?
Justifie ta réponse.

3. Un marchand de timbres a 5200 timbres. A la foire aux timbres, il achète 15 pochettes de 50 timbres et vend 36 pochettes de 40 ;
Combien de timbres possède-t-il après la foire ?
Un collectionneur de timbres avait déjà 3425 timbres. A la foire aux timbres il donne 21 pochettes de 35 timbres à ses amis qui lui offre en échange 17 pochettes de 51 timbres
Combien de timbres possède-t-il après la foire ?

La place de la question

Dans les 4 énoncés suivants : surligne en orange la partie du texte qui précise au lecteur ce qu'il doit faire.

1. Range ses quatre enfants du plus petit au plus grand :
Anna est plus grande que Caroline.
Frédéric est plus petit qu'Anna.
Tristan est plus grand que Caroline et plus petit que Frédéric.

2. Combien d'albums Zoé peut-elle remplir avec 248 timbres, sachant qu'un album contient 50 timbres ?

4. Un marchand de cycles a vendu pendant la semaine :
- 2 motos à 3642€ la moto ;
- un scooter à 1299€ ;
- 7 casques à 158€ pièce.
« Cette semaine, j'ai vendu pour près de 10 000€ de marchandise », se dit-il.
A-t-il raison ?
Justifie ta réponse.

3. Un marchand de timbres a 5200 timbres. A la foire aux timbres, il achète 15 pochettes de 50 timbres et vend 36 pochettes de 40 ;
Combien de timbres possède-t-il après la foire ?
Un collectionneur de timbres avait déjà 3425 timbres. A la foire aux timbres il donne 21 pochettes de 35 timbres à ses amis qui lui offre en échange 17 pochettes de 51 timbres
Combien de timbres possède-t-il après la foire ?

L'ordre d'apparition des informations

Séquentialité:

• Marie possède 41 images. Elle en donne 12 à Claire. Combien lui en reste-t-il?

• Anaïs ajoute 12 billes dans une boîte qui en contient déjà. Il y a maintenant 41 billes dans cette boîte. Combien y avait-il de billes dans la boîte au départ?

Simultanéité:

Pierre n'a que des pièces de 50 centimes et des pièces de 20 centimes dans sa tire-lire. En tout, il a 6 pièces. Il compte son argent et trouve 210 centimes (ou 2,10€).

Combien Pierre a-t-il de pièces de 50 centimes et de pièces de 20 centimes dans sa tire-lire?

Autres difficultés du côté de la langue...

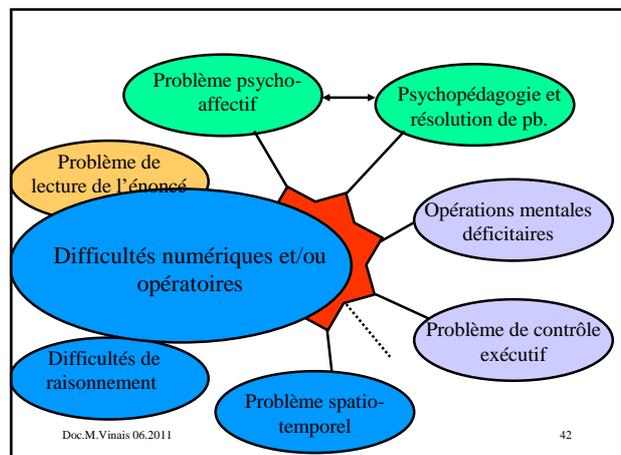
La syntaxe

Des constructions syntaxiques moins usitées dans la langue courante. Le souci de concision conduit à la formulation de compléments du nom en cascade et de phrases complexes composées de plusieurs subordinées.

La conjugaison

L'emploi des temps de conjugaison comme l'imparfait, le plus-que-parfait, voire le futur antérieur.

L'emploi du participe présent : sachant que...



Champ du numérique

NB : acquisition de notre chaîne numérique, niveaux d'élaboration, lois organisationnelles...N+

Attention : N+ → D

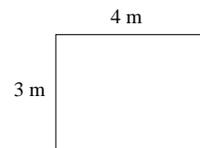
Sens intrinsèque et sens extrinsèque du nombre...

... Incidence dans la résolution de problème mathématique

Quel le prix de 4 dvd sachant que leur prix unitaire est de 28€ ?

$$4^{\text{dvd}} \times 28^{\text{€}} = 112^{\text{dvd}}$$

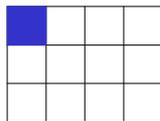
Aire de la surface du rectangle : L x l



Calcul de l'aire :

$$4 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$$

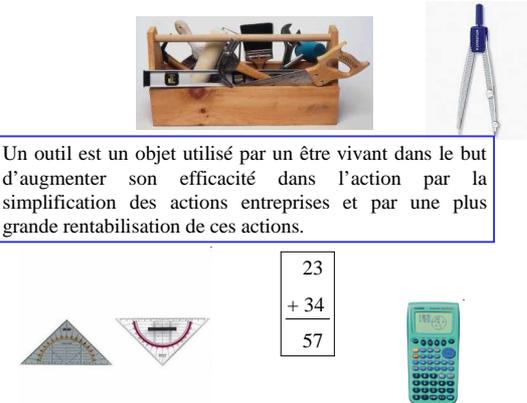
Aire de la surface du rectangle : L x l



Calcul de l'aire :

$$1 \text{ u} \times 4 \times 3 = 12 \text{ u}$$

La question des techniques opératoires



Un outil est un objet utilisé par un être vivant dans le but d'augmenter son efficacité dans l'action par la simplification des actions entreprises et par une plus grande rentabilisation de ces actions.

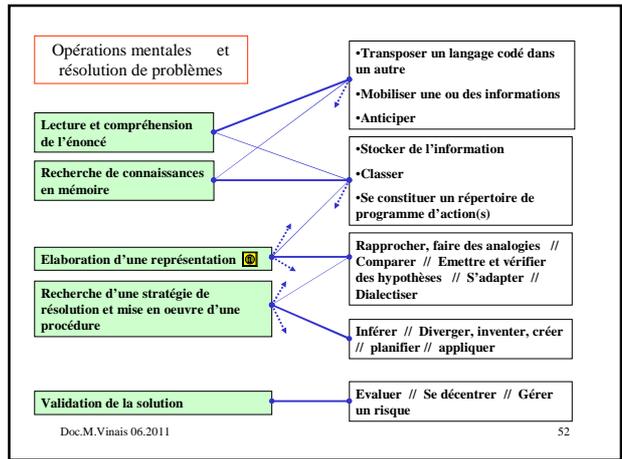
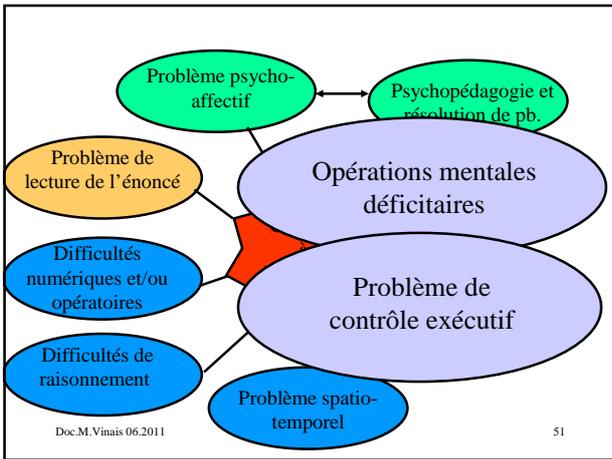
| |
|------|
| 23 |
| + 34 |
| 57 |

Doc.M.Vinais 06.2011

Le sens des techniques opératoires:

- Historique et remédiation
- Connaissances procédurales (algorithme)
- En appui sur les propriétés
- Le calcul mental

La résolution de problèmes contribue à construire le sens des opérations.



Opérations mentales et résolution de problèmes

- Transposer un langage codé dans un autre
- Mobiliser une ou des informations
- Anticiper

Lecture et compréhension de l'énoncé

Recherche de connaissances en mémoire

Elaboration d'une représentation

Recherche d'une stratégie de résolution et mise en œuvre d'une procédure

Validation de la solution

Traduire 3 codes en interaction... périmètre... cm, l, €...

Identifier ce que l'on cherche, lister les informations en fonction de ce que l'on recherche, stabiliser ses choix...

Se projeter avant d'agir... ce que ça peut produire...

Doc.M.Vinais 06.2011

Opérations mentales et résolution de problèmes

- Stocker de l'information
- Classifier
- Se constituer un répertoire de programme d'action(s)

Lecture et compréhension de l'énoncé

Recherche de connaissances en mémoire

Elaboration d'une représentation

Recherche d'une stratégie de résolution et mise en œuvre d'une procédure

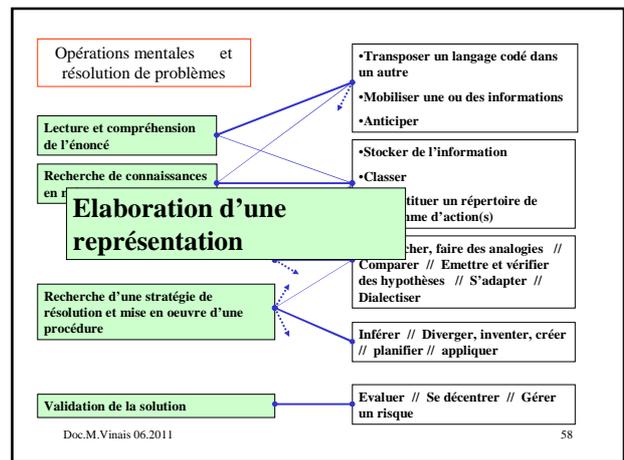
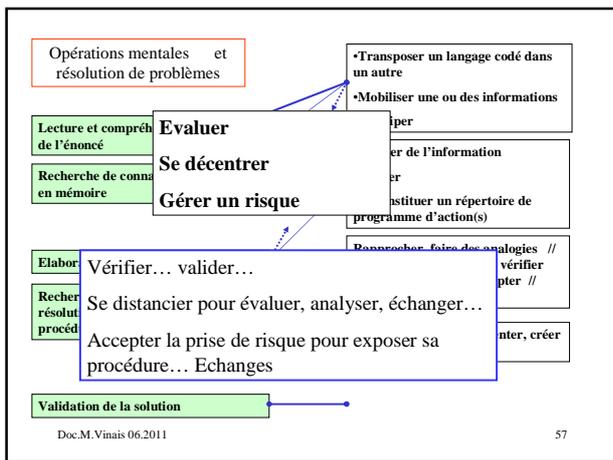
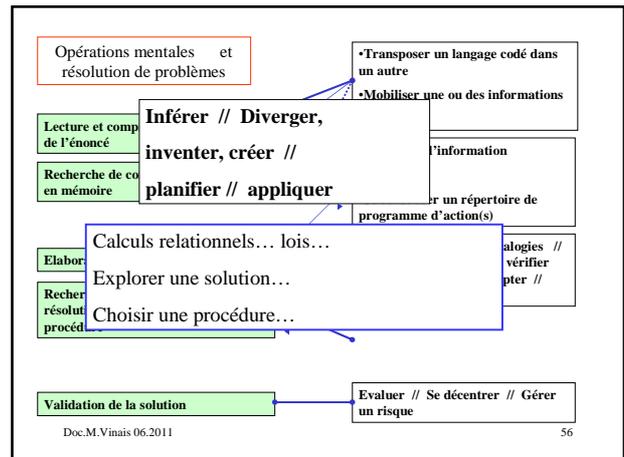
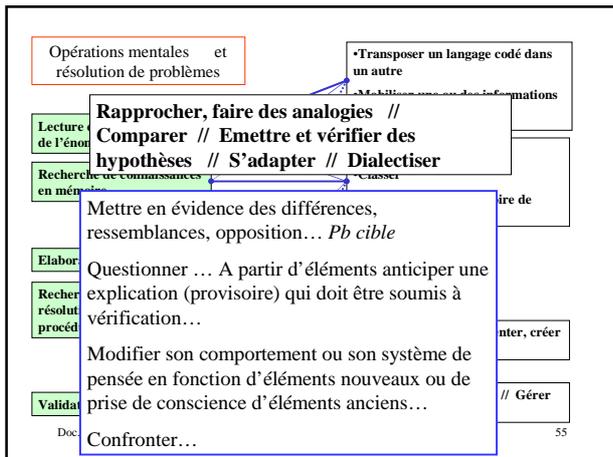
Validation de la solution

Mémorisation, connaissance encyclopédique...

Organiser des informations, classe ou ordre

Stocker des programmes d'action associés à des classes de problèmes...

Doc.M.Vinais 06.2011



Processus de construction d'une représentation
Cf J. Julo

Les représentations particularisées sont construites suivant 3 processus :

Processus d'interprétation et de sélection
Processus de structuration
Processus d'opérationnalisation

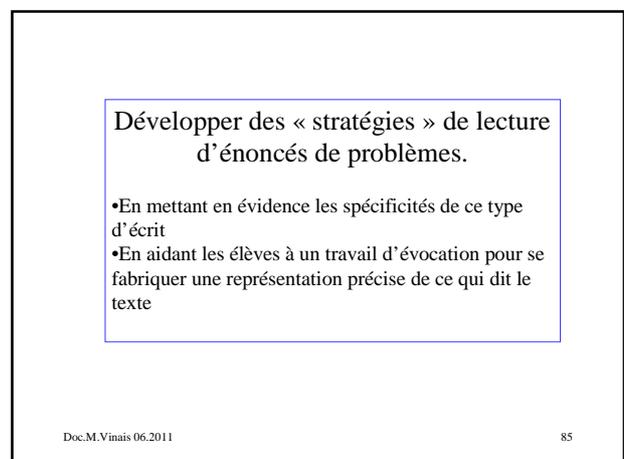
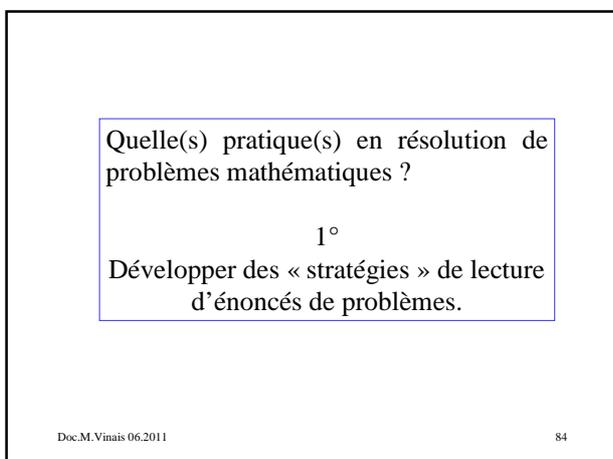
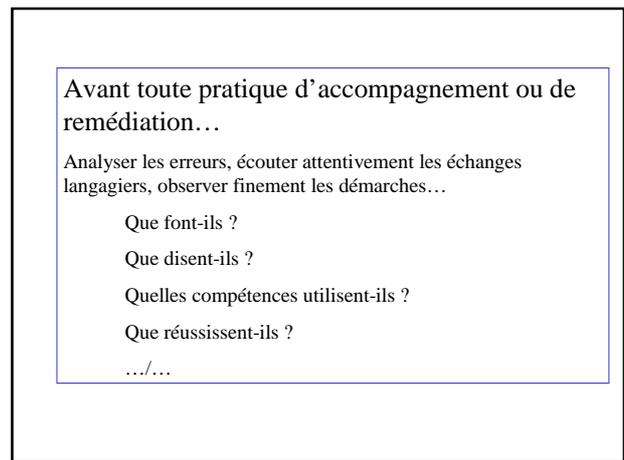
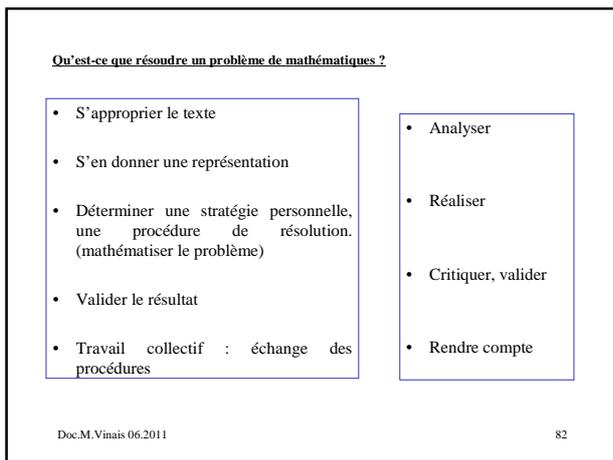
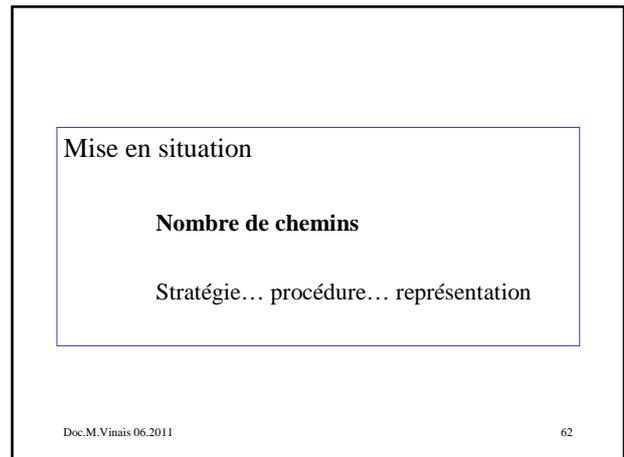
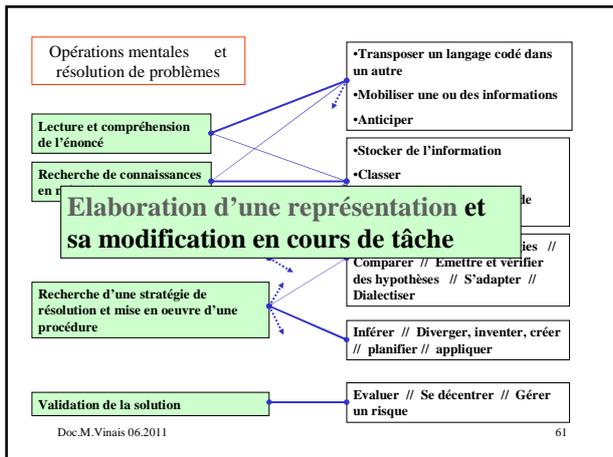
Doc.M.Vinais 06.2011 59

Processus de construction d'une représentation

Les représentations particularisées sont construites suivant 3 processus :

Processus d'interprétation et de sélection
Processus de structuration
Processus d'opérationnalisation

Doc.M.Vinais 06.2011 60



Développer des « stratégies » de lecture d'énoncés de problèmes.

Pour éviter la rupture entre la phase d'évocation et la phase de résolution, solliciter :

- Mime
- Dessin
- Schéma
- Reformulation

Cf. Travaux Ermel

Quelle(s) pratique(s) en résolution de problèmes mathématiques ?

2°

L'élaboration didactique...

Diversité et nombre des problèmes qu'il faut proposer. (Élaboration didactique)

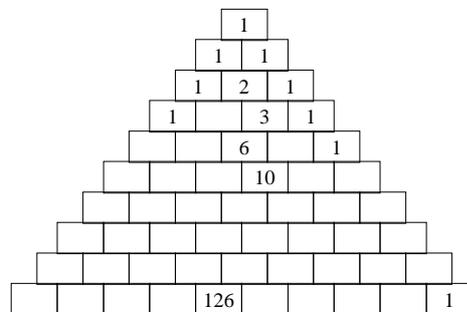
- **Situations fonctionnelles**
- Situations pseudo-concrètes
- Situations abstraites
 - Situations jeux
- Problèmes ouverts (mise en situation)
 - Problèmes à chercher

Diversité et nombre des problèmes qu'il faut proposer. (Élaboration didactique)

- Situations fonctionnelles
- **Situations pseudo-concrètes**
- Situations abstraites
 - Situations jeux
- Problèmes ouverts (mise en situation)
 - Problèmes à chercher

Diversité et nombre des problèmes qu'il faut proposer. (Élaboration didactique)

- Situations fonctionnelles
- Situations pseudo-concrètes
- **Situations abstraites**
 - Situations jeux
- Problèmes ouverts (mise en situation)
 - Problèmes à chercher



Diversité et nombre des problèmes qu'il faut proposer.
(Élaboration didactique)

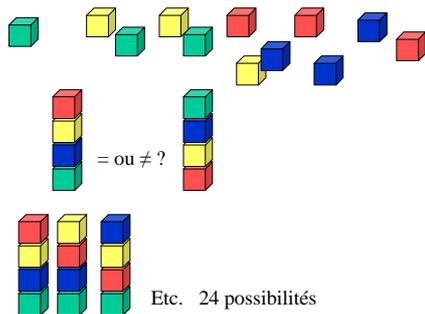
- Situations fonctionnelles
- Situations pseudo-concrètes
- Situations abstraites
 - Situations jeux
- **Problèmes « ouverts »**
 - **Problèmes à chercher**
 - **Problèmes ouverts**

Cf travaux de JF Georget

Quelques domaines des mathématiques dans lesquels on peut proposer des problèmes pour chercher :
Trouver toutes les cas répondant à certaines contraintes ou les dénombrer : trouver des premiers cas, plusieurs cas, tous les cas et en être sûr

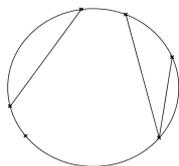
- numération
- géométrie
- logique élémentaire

Construire le maximum de tours différentes avec 4 cubes de couleurs différentes (ERMEL CP).



Recherche de tous les nombres de trois chiffres que l'on peut faire avec les chiffres 1, 3 et 5 (ERMEL CP).

111
113
115
131
135
151
153
155
Etc...



On place des points sur un cercle. Combien de cordes peut-on tracer ?

source : ERMEL CM2

Diversité et nombre des problèmes qu'il faut proposer.
(Élaboration didactique)

- Situations fonctionnelles
- Situations pseudo-concrètes
- Situations abstraites
 - Situations jeux
- **Problèmes « ouverts »**
 - **Problèmes à chercher**
 - **Problèmes ouverts**

Diversité et nombre des problèmes qu'il faut proposer.
(Élaboration didactique)

Situations fonctionnelles / Situations pseudo-concrètes
Situations abstraites / Problèmes « ouverts »

Pratiquer les différentes situations!

Quelle(s) pratique(s) en résolution de problèmes mathématiques ?

3°

La théorie des champs conceptuels...

• **Analyse de situations et pistes de remédiation** : Cadre théorique des champs conceptuels et résolution de problèmes.

• **Ce n'est pas à travers un seul type de situations que l'addition et la soustraction peuvent prendre du sens, mais à travers une variété relativement grande de situations.**

• **Analyse de situations et pistes de remédiation** : cadre théorique des champs conceptuels et résolution de problèmes.

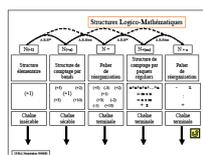
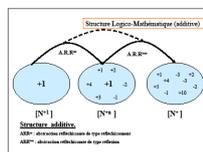
STRUCTURE ADDITIVE (Classification de Carpenter et Mooser)

1. La relation état initial / transformation / état final
2. La relation partie-partie-tout
3. La comparaison quantifiée d'un référé à un référent
4. La composition de deux transformations
5. Compositions de relations
6. Transformations d'une relation

STRUCTURE ADDITIVE

(Classification de Carpenter et Mooser)

1. La relation état initial / transformation / état final
2. La relation partie-partie-tout
3. La comparaison quantifiée d'un référé à un référent
4. La composition de deux transformations
5. Compositions de relations
6. Transformations d'une relation



| Problèmes | Ei | T | Ef | Op |
|---|----|---|----|----|
| Pb1 : Pierre avait 6 billes, il joue une partie avec Victor et en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ? | 6 | ↗ | ? | + |
| Pb2 : Alain avait 9 billes, il joue une partie avec Antoine et en perd 3. Combien en a-t-il maintenant ? | 9 | ↘ | ? | - |
| Pb3 : Paul avait 7 billes ; après avoir joué une partie, il en a 11. Que s'est-il passé ? En a-t-il gagné ou perdu ? Et combien de billes ? | 7 | ? | 11 | - |
| Pb4 : Olivier avait 16 billes ; après avoir joué une partie, il en a 12. Que s'est-il passé ? En a-t-il gagné ou perdu ? Et combien de billes ? | 16 | ? | 12 | - |
| Pb5 : Charlotte vient de gagner 3 billes. Elle en a maintenant 10. Combien en avait-elle avant de jouer ? | ? | ↗ | 10 | - |
| Pb6 : Quentin vient de perdre 5 billes en jouant avec Simon. Il en a maintenant 3. Combien en avait-il avant de jouer ? | ? | ↘ | 3 | + |

Relation Partie-Partie tout

| Problèmes | Op |
|--|----|
| Pb7 : Jérôme a 7 billes en verre et 4 billes en acier. Combien en a-t-il en tout ? | |
| Pb8 : Karim a invité 9 enfants pour son anniversaire. 5 d'entre eux sont des garçons. Combien y a-t-il de filles ? | |

Pb7

Pb8

Diagrammes d'Euler-Venn

Doc.M.Vinavis 06.2011
104

Comparaison quantifiée d'un référent à un référent

| | Le référent est plus grand que le référent | Le référent est plus petit que le référent |
|------------------------|---|---|
| On cherche le référent | Anne a 5 CD de plus que Charlene. Charlene en a 4. Combien Anne en a-t-elle ? Anne ↑ + 5 Charlene | Anne a 3 jeux de moins que Carole. Carole en a 7. Combien Anne en a-t-elle ? Anne ↑ - 3 Carole |
| On cherche la relation | Myriam a 16 ans, Patrick en a 12. Combien d'années Patrick a-t-il de moins que Myriam ? Myriam ↑ - 12 Patrick | Yasmine a 16 ans, Patrick en a 22. Combien d'années Patrick a-t-il de plus que Myriam ? Patrick ↑ - 16 Myriam |
| On cherche le référent | Paul a 4 ans de plus que sa sœur Céline. Il a 15 ans. Quel âge Céline a-t-elle ? Paul ↑ - 4 Céline | Pierre mesure 15 cm de moins qu'Alexandre. Il mesure 172 cm. Quelle est la taille d'Alexandre ? Pierre ↑ + 15 Alexandre |

Doc.M.Vinavis 06.2011
105

L'enjeu didactique de la structure additive :

Parvenus à ce stade de la réflexion, il convient de ne pas se tromper sur l'enjeu didactique de la structure additive. Il ne s'agit pas d'une simple classification d'énoncés, mais plutôt d'une classification des raisonnements face à des problèmes de la structure additive. Et ce sont d'abord ces raisonnements qu'il faut chercher à développer et évaluer chez les élèves.

Doc.M.Vinavis 06.2011
106

Points de vue différents sur catégorisation:

Un livre a 182 pages. J'en ai lu 47. Combien m'en reste-t-il à lire?

Doc.M.Vinavis 06.2011
107

Points de vue différents sur catégorisation:

Un livre a 182 pages. J'en ai lu 47. Combien m'en reste-t-il à lire?

On peut se le représenter comme un problème de **relation partie-partie-tout** (une partie de 47 pages est l'élément d'un tout de 182 pages).

Doc.M.Vinavis 06.2011
108

Points de vue différents sur catégorisation:

Un livre a 182 pages. J'en ai lu 47. Combien m'en reste-t-il à lire?

on peut se le représenter comme un **problème de comparaison** entre les pages déjà lues et les pages à lire (les 182 pages à lire sont combien de plus que les 47 pages lues ?).

Doc.M.Vinavis 06.2011
109

Points de vue différents sur catégorisation:

Un livre a 182 pages. J'en ai lu 47. Combien m'en reste-t-il à lire?

on peut se le représenter comme

un problème de transformation

(l'état initial est constitué des 182 pages à lire, la transformation - 47 est donnée par l'indication *J'ai lu* et l'état final est le nombre de pages qui restent à lire).

Quelle(s) pratique(s) en résolution de problèmes mathématiques ?

4°

L'aide à la représentation...

Place de la représentation dans la résolution de problème mathématique (Travaux de J. Julo et J. Houdebine (1988))

Une aide à la représentation constitue le véritable enjeu de l'enseignement des mathématiques. « *La représentation, au sens où l'entend la psychologie cognitive, n'est pas une simple reproduction ou une photographie d'une partie de notre environnement. Elle est le résultat d'une véritable activité mentale mettant en œuvre tout un ensemble de processus chargés de traiter les informations issues de cet environnement. [...]* » Jean Julo (1995)

Place de la représentation dans l'aide à la résolution de problème : Travaux de J. Julo et J. Houdebine (1988)

Cette phase de représentation, qui est essentielle à la réussite des problèmes, n'est pas facile pour les élèves en difficulté. Leurs représentations sont souvent « *rigides et vulnérables* ». Il présente trois défauts dans l'acte de représentation à l'origine de l'échec en mathématiques :

- Représentation du problème fluctuante : instabilité des points de vue
- Représentation du problème incomplète : incohérence des éléments sélectionnés.
- Représentation du problème inadéquate : insensibilité aux contradictions.

Place de la représentation dans l'aide à la résolution de problème : Travaux de J. Julo et J. Houdebine (1988)

- Les problèmes isomorphes.
- Un problème dit « de base » est présenté par écrit aux élèves, en même temps que plusieurs variantes de ce même problème. Les élèves sont donc confrontés à une présentation simultanée de plusieurs problèmes annoncés comme équivalents c'est-à-dire même structure relationnelle et avec les mêmes valeurs numériques.
- La consigne leur demande de lire les différents problèmes et d'en choisir un et de le résoudre.

PROBLEMES ISOMORPHES.

(même structure relationnelle et mêmes valeurs numériques)

Enoncé 1

On a 3 ficelles : une grande, une moyenne et une petite. Mises bout-à-bout elles mesurent 126 cm. La grande ficelle est 4 fois plus longue que la petite ; la moyenne est 2 fois plus longue que la petite.

Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

Enoncé 2

Michel, Pierre et Anne ont 126 ans à eux 3. Michel est 4 fois plus âgé qu'Anne.

Pierre est 2 fois plus âgé qu'Anne. Quel est l'âge de chacun d'eux ?

Enoncé 3

La somme de 3 nombres est 126. On va appeler ces nombres : nombre A, nombre B et nombre C. Le nombre A est 4 fois plus grand que le nombre C. Le nombre B est 2 fois plus grand que le nombre C.

Trouver les nombres A, B et C ?

PROBLEMES ISOMORPHES

Exemple 2

Énoncé 1

Un directeur achète 12 sièges dactylo pour la salle informatique. Chaque siège vaut 86€. Pour chaque achat supérieur à 10 sièges, il y a une remise de $\frac{1}{4}$ du prix par siège. Quel sera le montant de la facture ?

Énoncé 2

Un voyage organisé propose une sortie d'une journée au prix de 86€. Pour tout groupe de plus de 10 personnes, la compagnie accorde une réduction de 25%. Quel sera le coût du voyage pour un groupe de 12 personnes ?

Énoncé 3

Un restaurateur prévoit 86 ml de Rhum par personne pour réaliser un punch. Quand le groupe dépasse 10 personnes, il réduit cette proportion d'un quart. Quelle quantité de rhum lui faudra-t-il pour une réception de 12 personnes ?

Place de la représentation dans l'aide à la résolution de problème :

Énoncé :

On a 3 ficelles, une rouge, une jaune, une verte qui mises bout-à-bout mesurent 240 cm.

La rouge est 3 fois plus longue que la jaune.

La verte est 4 fois plus longue que la jaune.

Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

• **Aide A :** elle est constituée d'affirmation du type

« si la ficelle jaune mesurait 50 cm alors la ficelle rouge devrait mesurer 150 cm d'après le texte du problème. »

« Si la ficelle jaune mesurait 20 cm alors la ficelle verte devrait mesurer 60 cm d'après le texte du problème. »

L'élève doit décider pour chacune des propositions si elle est VRAIE ou FAUSSE d'après le texte du problème.

Aide G : elle concerne la présentation d'une partie des données sous forme graphique. Plusieurs schémas sont présentés aux élèves qui doivent repérer celui qui « correspond » au problème posé.

Schéma 1

| | |
|-------|---------------------|
| Rouge | /-----/-----/-----/ |
| Jaune | /-----/ |
| Verte | /-----/-----/ |

Schéma 2

| | |
|-------|---------------------------|
| Rouge | /-----/-----/-----/ |
| Jaune | /-----/-----/-----/-----/ |
| Verte | /-----/ |

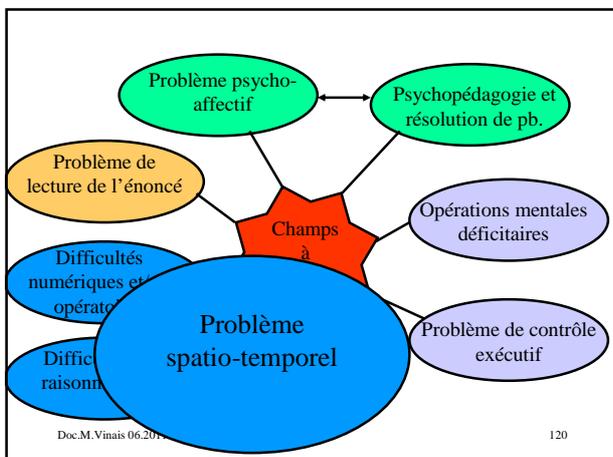
Schéma 3

| | |
|-------|---------------------------|
| Rouge | /-----/-----/-----/ |
| Jaune | /-----/ |
| Verte | /-----/-----/-----/-----/ |

Quelle(s) pratique(s) en résolution de problèmes mathématiques ?

5°

L'espace temps...



Travailler « autour » du problème.

K. Florentin

Problème et espace-temps

Problème et logique



| | | |
|-------|--------|-------|
| Etat | Action | Etat |
| Tps 1 | Tps 2 | Tps 3 |
| Avant | | Après |

Travailler autour du problème. B.GH Gepalm

Doc.M.Vinaiis 06.2011 122

| | |
|------------------------|--------------------------------------|
| $5 \longrightarrow 6$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? |
| $10 \longrightarrow 8$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? |
| $5 \longrightarrow 7$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? |

Il s'agit de comparer et de dire ce qui s'est passé, soit en ajout soit en retrait.
Doc.M.Vinaiis 06.2011 123

| | |
|-------------------------|--------------------------------------|
| $25 \longrightarrow 28$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? |
| $7 \longrightarrow 0$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? |
| $36 \longrightarrow 27$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? |

Il s'agit de comparer et de dire ce qui s'est passé, soit en ajout soit en retrait.
Doc.M.Vinaiis 06.2011 124

| | |
|-------------------------|---|
| $18 \longrightarrow 24$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? Ensuite ... Et combien? |
| $35 \longrightarrow 39$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? Ensuite ... Et combien? |
| $47 \longrightarrow 45$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? Ensuite ... Et combien? |

Il s'agit de comparer et de dire ce qui s'est passé, soit en ajout soit en retrait.
Doc.M.Vinaiis 06.2011 125

| | |
|-------------------------|--|
| $14 \longrightarrow 17$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? Ensuite ... Inventer un problème.. |
| $15 \longrightarrow 12$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? Ensuite ... Inventer un problème.. |
| $38 \longrightarrow 40$ | Peux-tu me dire ce qui s'est passé ? Ensuite ... Inventer un problème |

Il s'agit de comparer et de dire ce qui s'est passé, soit en ajout soit en retrait.
Doc.M.Vinaiis 06.2011 126

B. G.Hess n'hésite pas à déclarer que les élèves adorent les problèmes. Toutefois, elle n'a que faire du problème en lui-même. Elle l'ignore superbement et durant les rééducations, elle s'emploie à faire acquérir aux sujets structures logiques et outils mathématiques mais ne fait pas de problèmes. Pour cette rééducatrice très expérimentée, le problème n'apprend rien aux enfants. Si le travail en amont n'a pas été fait, on ne dépasse pas le stade des "automatismes", les bonnes réponses n'étant qu'aléatoires. Dans les instructions officiels, on demande de faire des problèmes, beaucoup de problèmes, pour apprendre à raisonner et B. G.Hess défend l'idée que l'ordre de la proposition doit être inversé : "Il faut apprendre à raisonner pour savoir résoudre des problèmes."

A voir

Doc.M.Vinaiis 06.2011 127

Quelle(s) pratique(s) en résolution de problèmes mathématiques ?

6°

Éléments de réflexion...

Importance de la présentation

Exemple de problème identique dont la présentation va influencer la résolution.

Aire de la surface du carré

Influence de la taille des données numériques et résolution de problèmes.

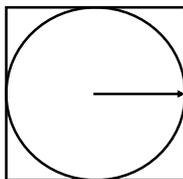
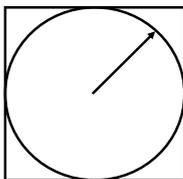
Concordance/discordance entre représentation initiale et économie de résolution numérique.

Quelle l'aire de la surface du carré ?

La flèche part du centre du cercle et mesure ...

Situation 1

Situation 2



Importance de la présentation

Exemple de problème identique dont la présentation va influencer la résolution.

Aire de la surface du carré

Influence de la taille des données numériques et résolution de problèmes.

Concordance/discordance entre représentation initiale et économie de résolution numérique.

Résolution de problèmes et taille des données numériques

M1 : Quel est le prix de 3 jeux « vidéo » à 50 euros l'un?

M2 : Quel est le prix de 50 jeux « vidéo » à 3 euros l'un?

Autre travail possible :

Liens données / réponses

Liens données / Questions

Liens solutions / Énoncés

.../...

Quelle(s) pratique(s) en résolution de problèmes mathématiques ?

7°

Autres activités...

Trouver le lien entre les données et la question.
Relie par une flèche les données aux questions.

Données

Questions

Dans un collège sont inscrits 350 externes et 150 pensionnaires.

Quel sera mon âge en 2010 ?

J'ai 25 ans en 2004.

Quelle est l'année de naissance de mon père ?

Un pull coûtait 60€. Il est soldé 30 €.

Combien d'élèves sont inscrits dans le collège ?

Mon père a eu 50 ans en 2000.

Quel est le pourcentage de réduction ?

Trouver le lien entre les données et la réponse.

Relie par une flèche les données à leur réponse. Attention : tu peux avoir plusieurs possibilités

Données

Réponses

J'ai roulé pendant 2 heures à la vitesse de 75km/h.

J'ai payé 13,50€.

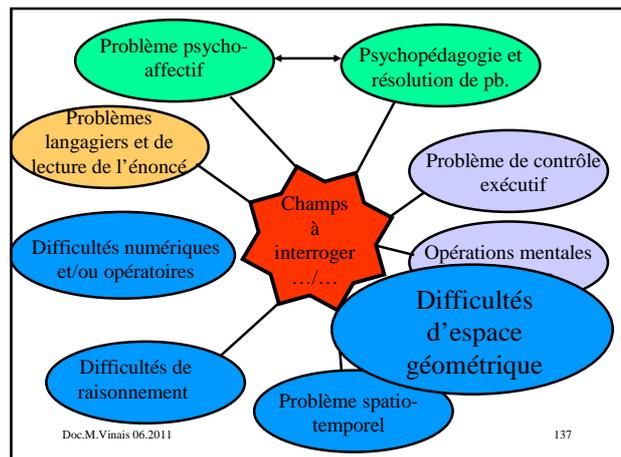
J'achète un jouet 15€, le commerçant me fait 10% de remise

La largeur du rectangle est 10cm.

La longueur d'un rectangle est 15cm. Son aire est 150 cm².

J'ai parcouru 150 km.

Ma remise est de 1,50€.



Objectifs cycle II BO N°3 du 19 juin 2008

2 - Géométrie

Les élèves enrichissent leurs connaissances en matière d'orientation et de repérage. Ils apprennent à reconnaître et à décrire des figures planes et des solides. **Ils utilisent des instruments et des techniques pour reproduire ou tracer des figures planes. Ils utilisent un vocabulaire spécifique.**

3 - Grandeurs et mesures

Les élèves apprennent et comparent les unités usuelles de longueur (m et cm ; km et m), de masse (kg et g), de contenance (le litre), et de temps (heure, demi heure), la monnaie (euro, centime d'euro). Ils commencent à résoudre des problèmes portant sur des longueurs, des masses, des durées ou des prix.

Objectifs cycle III

2 - Géométrie

L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.

Les relations et propriétés géométriques : alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale, milieu d'un segment.

L'utilisation d'instruments et de techniques : règle, équerre, compas, calque, papier quadrillé, papier pointé, pliage.

Les figures planes : le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme, le triangle et ses cas particuliers, le cercle : .../...

Concepts géométriques en acte (Cf G. Vergnaud)



Paul, 4,5 ans



Emma, 5 ans



Kévin 4 ans

| | |
|---------------------------|--|
| TOPOLOGIE | Continuité / voisinage /intérieur..extérieur |
| GEOMETRIE PROJECTIVE | Ligne droite + ceux de la topologie |
| GEOMETRIE AFFINE | Parallélisme + ceux de la géom projective |
| GEOMETRIE DES SIMILITUDES | Angles csrv/ orthogonalité + Ceux affine |
| GEOMETRIE METRIQUE | Longueurs conservés + ceux similitudes |

Construction de l'espace chez l'enfant

L'enfant et la construction des espaces géométriques

Doc.M.Vinaiis 06.2011 140

Situation initiale, points de départ donnés : P_1 et P_2

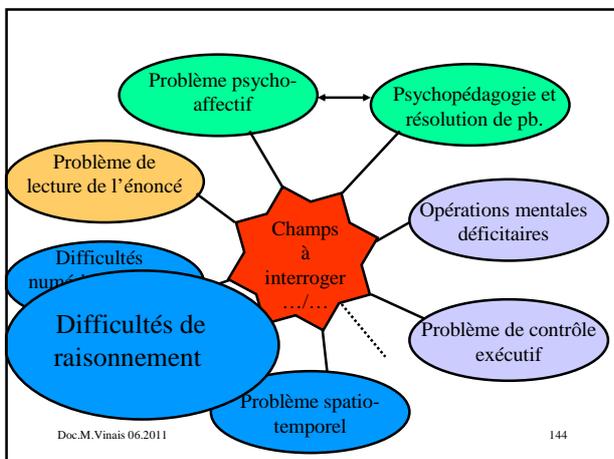
Doc.M.Vinaiis 06.2011 141

D1 droite passant par P_1, P_2
 D3 droite perpendiculaire à D1 passant par P_1
 D4 droite perpendiculaire à D1 passant par P_2
 C1 cercle de centre P_1 passant par P_2
 .../...

Doc.M.Vinaiis 06.2011 142

D1 droite passant par P_1, P_2
 D3 droite perpendiculaire à D1 passant par P_1
 D4 droite perpendiculaire à D1 passant par P_2
 C1 cercle de centre P_1 passant par P_2
 .../...
 S1 segment P_1P_2
 S2...
 .../...
 Effacer D1, D2...
 .../...
 Reste le carré $P_1 P_2 P_3 P_4$

Doc.M.Vinaiis 06.2011 143



Raisonnement / Logique / ALM

« L'intelligence est construction de liens » J. Piaget
 « Penser, c'est faire des liens » R. Feuerstein

- Relations langagières
- Relations numériques
- Relations logiques
- Relations spatiales
- Relations géométriques
- .../...

Doc.M.Vinaiis 06.2011 145

H. Planchon :

"Encore faut-il pour cela que l'individu ait réussi à s'engager effectivement et pleinement dans un processus de recherche; ce qui n'a rien d'évident; qu'on en juge:

Pour traiter un problème, en effet, il faut pouvoir (et l'énumération n'est pas exhaustive)

- se prendre au jeu d'une recherche gratuite par certains côtés,
- supporter des émotions souvent intenses,
- s'activer à imaginer des hypothèses, à bâtir des stratégies, à alimenter un questionnement permanent,
- s'arracher à la paralysie qui tend à envahir l'esprit,
- se hasarder dans l'inconnu sans savoir si l'on va trouver,
- tolérer un certain désordre intérieur,
- se plier à vérifier et critiquer les cheminements dans lesquels on s'est engagé,
- s'exposer à l'erreur et à l'échec.

Autant dire qu'à la violence et à l'insistance du problème doivent répondre l'audace et la ténacité de celui qui entreprend de s'y coller."